Algorithmische Geometrie
Wintersemester 2020/2021
Thomas Bläsius & Marcus Wilhelm

Übungsblatt 5

Abgabe bis 3. Februar 2021

Aufgabe 1: Größe des Voronoi-Diagramms — 3 Punkte

Gegeben seien $n \geq 3$ Punkte in der Ebene. Zeigt, dass die Anzahl der Knoten im zugehörigen Voronoi-Diagramm höchstens $2n - 5$ ist und die Anzahl der Kanten höchstens $3n - 6$.

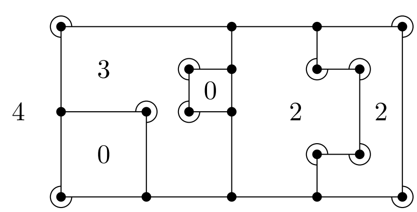
Aufgabe 2: Untere Schranke: Voronoi-Diagramm — 3 Punkte

Zeigt, dass man das Voronoi-Diagramm von n Punkten in der Ebene nicht schneller als $\Omega(n \log n)$ berechnen kann, es sei denn, man kann n Zahlen schneller als $\Omega(n \log n)$ sortieren.

Aufgabe 3: Da geht mir ein Knicklicht auf! — 6 Punkte

Ein planarer Graph ist *knickfrei orthogonal zeichenbar* wenn man ihn so zeichnen kann, dass jede Kante eine horizontale oder vertikale Strecke ist. Die *Winkelkomplexität* einer knickfreien orthogonalen Zeichnung beschriebt die kleinste Zahl k, sodass jede innere Facette maximal k 270° Winkel enthält und die äußere Facette maximal $k + 4$.

Zeigt, dass es sogar für (kleines) konstantes k NP-schwer ist, zu entscheiden, ob es für einen planaren Graphen eine knickfreie orthogonale Zeichnung mit Winkelkomplexität höchstens k gibt.



Aufgabe 4: Triangulierung Konzyklischer Punkte **3 + 3 + 2 = 8 Punkte**

Gegeben sei ein Polygon P mit n Punkten, die alle auf einem gemeinsamen Kreis liegen. Dabei seien die Distanzen zwischen je zwei Punkten paarweise verschieden.

Ziel dieser Aufgabe ist es, einen Algorithmus zu konstruieren, der eine optimale Triangulierung (bzgl. lexikografischer Ordnung der Winkelvektoren) von P findet.

Teilaufgabe (a) Wir definieren als *Längen-Vektor* die aufsteigend sortierten Längen der eingefügten Kanten einer Triangulierung von P. Analog zum Winkel-Vektor ordnen wir Längen-Vektoren lexikografisch. Zeigt, dass eine Triangulierung genau dann optimal ist, wenn sie den Längen-Vektor maximiert.

Teilaufgabe (b) Der *schwache Dualgraph* $G^\star$ eines triangulierten, geometrischen Graphen G enthält einen Knoten für jedes Dreieck in G (wobei die äußere Facette nicht berücksichtigt wird). Zwei Knoten in $G^\star$ sind genau dann verbunden, wenn sich die zugehörigen Facetten in G eine Kante teilen. Zeigt, dass der schwache Dualgraph einer optimalen Triangulierung von P ein Pfad ist.

Teilaufgabe (c) Skizziert einen Algorithmus, der in $\mathcal{O}(n)$ Zeit eine optimale Triangulierung von P findet.