

Übungsblatt 4

Abgabe bis 20. Januar 2021

Aufgabe 1: Mission: Impossible

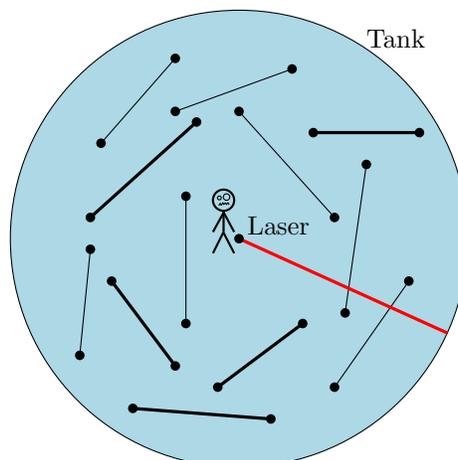
6 Punkte

Die Luft wird knapp! Agent *T. Ethan Suche* vom Geheimdienst *ALGO2* findet sich in einer prekären Situation wieder. Sein böser Zwillingsbruder *Brighton* hat ihn mitten in einen zylinderförmigen Tank gesteckt, der komplett mit Wasser gefüllt ist. Zum Glück hat er einen Laser (getarnt als Whiteboard-Marker), der die Wand des Tanks durchbrechen und den Agenten retten könnte. Leider ist der Agent von n Glasscheiben umgeben, deren Stärke die Kraft des Lasers beeinträchtigen.

Vor Panik rotiert der Agent den Laser alle $\mathcal{O}(\log(n) + k)$ Sekunden zu einem zufällig gewählten Winkel, wobei k die Anzahl der Scheiben ist, die der Laser in der aktuellen Ausrichtung treffen würde. Nach einer Neuausrichtung muss T. Ethan entscheiden, ob er den Laser aktiviert. Da ein Laser in Whiteboard-Marker Form nur über eine sehr kleine Batterie verfügt, hat er nur eine einzige Chance, um den Laser an der richtigen Stelle einzuschalten.

Zum Glück hatte unser Agent $\mathcal{O}(n \log n)$ Vorberechnungszeit und $\mathcal{O}(n)$ Speicher, in der er zwar die Positionen der Glasscheiben studieren konnte, deren Stärke aber nicht! Für einen gegebenen Winkel muss er nun die Summe der Stärken der getroffenen Scheiben bestimmen um zu entscheiden, ob der Laser die Wand des Tanks erreichen würde.

Wie hat T. Ethan die Vorberechnungszeit genutzt? Und wie kann er nun schnell genug herausfinden, welche k Scheiben der Laser in einer gegebenen Position schneiden würde, bevor ihn die Panik überkommt und er zur nächsten Position rotiert?



Aufgabe 2: Anderthalbe Bereichsanfragen

6 Punkte

Gegeben seien n Punkte in der Ebene. Eine anderthalbe Bereichsanfrage ist definiert durch $x_1, x_2, y \in \mathbb{R}$ und fragt die Teilmenge der Punkte an, die im Intervall $[x_1, x_2] \times [y, \infty]$ liegen. Gebt einen Algorithmus an, der nach $\mathcal{O}(n \log n)$ Vorberechnungszeit mit $\mathcal{O}(n)$ Speicher anderthalbe Bereichsanfragen in $\mathcal{O}(\log(n) + k)$ Zeit beantworten kann. Dabei ist k die Anzahl der Punkte, die im angefragten Bereich liegen.

Aufgabe 3: Monster-Aufgabe

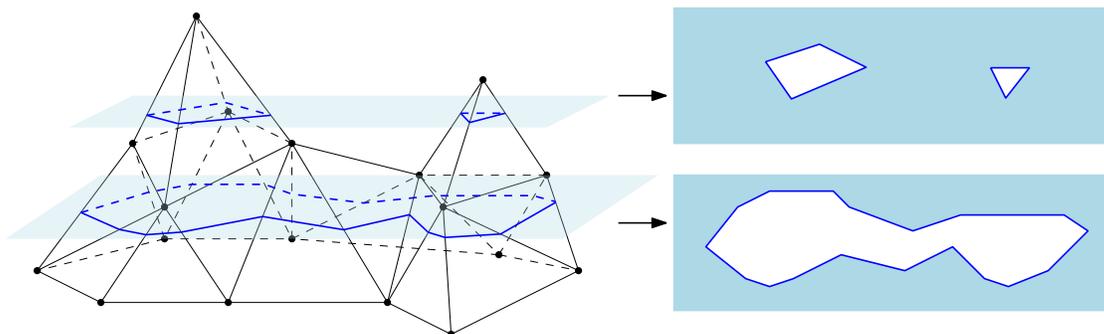
8 Punkte

Auf einer Insel leben zwei Gruppen von Monstern. Eine Gruppe liebt es im Wasser baden zu gehen. Die andere Gruppe hat Angst vor Wasser und versucht dieses zu meiden. Da die Bade-Monster so groß sind, steigt der Meeresspiegel, wenn sie ins Wasser gehen, und sinkt, wenn sie es verlassen. Das ist natürlich ein Problem für die Nicht-Bade-Monster, die nie wissen, welche Teile der Insel gerade überflutet sind.

Zur Lösung des Problems entwickeln die Nicht-Bade-Monster eine App, die auf einer Karte die Teile der Insel zeigt, die aktuell nicht überflutet sind. Dazu haben sie die Insel als triangulierten, geometrischen Graphen G mit n Punkten abgebildet, in dem jeder Knoten i mit einer Koordinate z_i versehen ist, die die Höhe des Knotens über Normalnull beschreibt. Wie sich herausstellt, ist die Insel z -monoton, was heißt, dass G (inkl. Facetten) an jedem Punkt nur genau einmal von einer Geraden geschnitten wird, die parallel zur z -Achse verläuft.

Da sich der Wasserpegel so häufig ändert, sollen zunächst einmalig $\mathcal{O}(n \log n)$ Vorberechnungszeit und $\mathcal{O}(n)$ Speicher investiert werden, um die Karte danach immer schnell updaten zu können. Ein Sensor misst dann in kurzen Abständen den aktuellen Wasserpegel z und übermittelt ihn an die App, welche daraufhin auf der Karte alle Polygone anzeigt, die genau die Teile der Insel eingrenzen, die oberhalb des Wassers liegen.

Wie muss vorberechnet werden, damit die vorgegebenen Schranken nicht überschritten werden? Und wie können dann bei einer Pegeländerung in $\mathcal{O}(\log(n) + k)$ Zeit die Polygone bestimmt werden, welche die Teile der Insel eingrenzen, die oberhalb des Wassers liegen? Dabei sei k die Anzahl der Punkte dieser Polygone.



Aufgabe 4: „Selbst“ gemachte Geschenke

5 Bonuspunkte

Thomas und Marcus mangelt es noch an Weihnachtsgeschenken für diverse Verwandte. Da sich die Verwandten immer am meisten über selbst gemachte Geschenke freuen, sollt ihr etwas selbst machen! Benutzt Origami oder die Fold-and-Cut Methode um ein möglichst *cooles* Objekt zu erstellen. Macht zur Abgabe ein Bild vom Werk. (Da sich Verwandte auch nach Weihnachten über Geschenke freuen, ist es okay, das Foto erst zum Abgabedatum einzureichen.)