Karlsruher Institut für Technologie

Übungsblatt 2

Abgabe bis 9. Dezember 2020

Aufgabe 1: Triangulierung — 2 + 2 + 2 = 6 Punkte

Teilaufgabe (a) Gegeben sei ein einfaches Polygon P mit n Punkten. Unter Umständen gibt es mehrere Möglichkeiten P zu triangulieren. In wie viele Dreiecke wird P von den möglichen Triangulierungen jeweils unterteilt? *(Beweist eure Aussage!)*

Teilaufgabe (b) Wir betrachten nun ein Polygon P, welches Löcher enthalten kann. Beweist, dass P immer trianguliert werden kann.

Teilaufgabe (c) Gegeben sei ein Polygon P, welches Löcher enthalten kann. Der Rand des Polygons sei durch n Punkte definiert. Unter Umständen gibt es mehrere Möglichkeiten P zu triangulieren. In wie viele Dreiecke wird P von den möglichen Triangulierungen jeweils unterteilt? *(Beweist eure Aussage!)*

Hinweis: In einem planaren Graphen mit n Knoten und m Kanten gilt $m \leq 3n - 6$*. Gleichheit gilt genau dann, wenn der Rand jeder Facette (einschließlich der Äußeren) einen Kreis der Länge 3 bildet.*

Aufgabe 2: y-monotone Triangulierung — 5 Punkte

Entwerft einen Algorithmus, der als Eingabe ein y-monotones Polygon P mit n Punkten erhält und in $\mathcal{O}(n)$ Zeit die Diagonalen ausgibt, die P triangulieren. Zeigt, dass euer Algorithmus korrekt ist und die vorgegebene Laufzeitschranke nicht überschreitet.

Aufgabe 3: 2D-LP Vervollständigen — 4 Punkte

Gebt einen Algorithmus an, der als Eingabe ein 2-dimensionales lineares Programm (LP) mit n Nebenbedingungen erhält und in $\mathcal{O}(n)$ Zeit bestimmt, ob es unbeschränkt ist. Wie kann euer Algorithmus verwendet werden, um den Algorithmus zur Lösung eines 2D-LP aus der Vorlesung zu vervollständigen?

Aufgabe 4: Skihütten — 5 Punkte

Ihr seid dabei den nächsten Skiurlaub zu planen. Das wichtigste Kriterium für die Wahl eines Skigebiets ist (für verschiedene x) die Anzahl Skihütten die auf x Metern Höhe liegen. Um einfacher bewerten zu können wie interessant ein Skigebiet ist, sucht ihr deshalb einen effizienten Algorithmus der derartige Informationen aus den Karten der Skigebiete extrahieren kann.

Die Karten bestehen aus einer Menge von Polygonen (welche Höhenlinien repräsentieren) und einer Menge von Punkten (den Skihütten), wobei sich die Kanten der Polygone nicht schneiden, aber trotzdem Polygone in anderen Polygonen enthalten sein können. Der Algorithmus soll für ein Skigebiet bestimmen wie viele der Skihütten in genau x Polygonen enthalten sind.

Aufgabe 5: Implementierung des 2D-LP — 5 Bonus-Punkte

Implementiert ein Programm welches ein 2-dimensionales LP löst, indem eine Zielfuntkion unter gegebenen Nebenbedingungen maximiert werden soll. Für ein LP mit n Nebenbedingungen soll der implementierte Algorithmus eine erwartete Laufzeit in $\mathcal{O}(n)$ haben.

Zur Erinnerung: Ein 2-dimensionales LP hat folgende Form:

$$\begin{aligned} \text{maximiere} \quad & c_1x_1 + c_2x_2 \\ \text{sodass} \quad & a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 \leq b_1 \\ & a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 \leq b_2 \\ & \dots \\ & a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 \leq b_n \end{aligned}$$

Zur Ein- und Ausgabe sind dabei folgende Formate vorgesehen.

Eingabe: Die Eingabe ist eine Textdatei, welche aus $n + 1$ Zeilen besteht. Die erste Zeile enthält die ganzzahligen Koeffizienten c_1 und c_2 der zu maximierenden Funktion, welche durch ein Tab-Symbol (`\t`) getrennt sind. Die darauf folgenden n Zeilen beschreiben die n Nebenbedingungen. Ein einzelne Zeile i besteht dabei aus ganzen Zahlen $a_{i,1}$, $a_{i,2}$ und b_i, welche jeweils durch ein Tab-Symbol (`\t`) getrennt sind.

Ausgabe: Die Ausgabe besteht aus einer Zahl welche den maximalen Zielfunktionswert unter Einhaltung der Nebenbedingungen repräsentiert. Wenn es keine Lösung gibt, soll die Ausgabe aus dem Text `False` bestehen. Ist die optimale Lösung unbeschränkt, soll die Ausgabe `True` sein.

Beispiel Eingabe (vgl. Vorlesung)		
1	1	
−1	0	0
0	−1	0
−1	1	1
1	6	15
4	−1	10

Zugehörige Ausgabe
5