

Algorithmische Geometrie

Geometrie



Kongruenzsätze: zurück in die Schulzeit

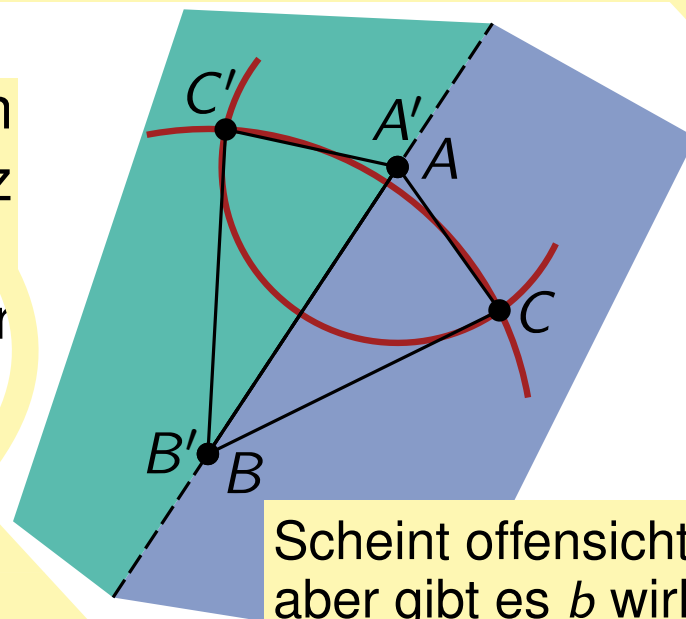
Theorem

(Kongruenzsatz SSS)

Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ mit $|\overline{AB}| = |\overline{A'B'}|$, $|\overline{BC}| = |\overline{B'C'}|$ und $|\overline{CA}| = |\overline{C'A'}|$ sind kongruent.

Beweis

- $|\overline{AB}| = |\overline{A'B'}| \Rightarrow$ es gibt eine Bewegung b , mit $b(A) = A'$ und $b(B) = B'$
- $A'B'$ definiert zwei Halbebenen
- in jeder der Halbebenen gibt es nur einen Punkt mit Distanz $|\overline{AC}|$ von A und Distanz $|\overline{BC}|$ von B
- entweder b oder b zusammen mit einer Spiegelung an $A'B'$ bildet C auf C' ab $\Rightarrow$ Dreiecke sind kongruent



Scheint offensichtlich...
aber gibt es b wirklich?
Wer garantiert uns das?

Stimmt das wirklich? Wenn ja, warum?

Läuft letzten Endes auf die Dreiecksungleichung hinaus!

Und wie beweisen wir die Dreiecksungleichung?

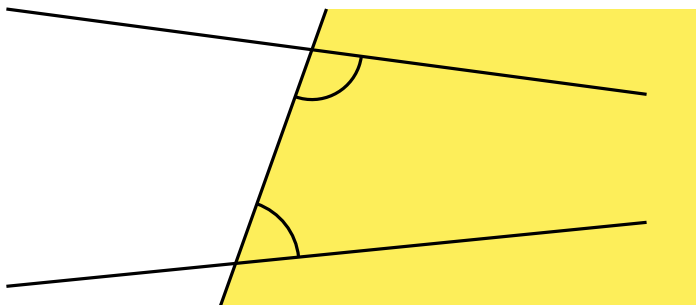
Axiomatische Sichtweise nach Euklid

Euklid (um 300 v. Chr.)

- formulierte gewisse Grundwahrheiten (Postulate und Axiome)
- alles weitere sollte ohne Benutzung der Anschauung folgen

Die fünf Axiome

- Was demselben gleich ist, ist auch untereinander gleich.
- Wird Gleiches zu Gleichem hinzugefügt, erhält man Gleiches.
- Wird Gleiches von Gleichem weggenommen, bleibt Gleiches übrig.
- Was sich deckt, ist gleich.
- Das Ganze ist größer als der Teil.



Die fünf Postulate fordern, dass

- man von jedem Punkt zu jedem anderen eine Strecke ziehen kann;
- man jede Strecke zu einer Geraden verlängern kann;
- man zu jedem Mittelpunkt und Radius einen Kreis zeichnen kann;
- alle rechten Winkel gleich sind;
- sich zwei Geraden, die von einer dritten so geschnitten werden, dass zwei innere Winkel auf derselben Seite zusammen kleiner als zwei rechte Winkel sind, bei Verlängerung ins unendliche auf ebendieser Seite schneiden.

das letzte Postulat heißt **Parallelenaxiom**

Trivia

Euklids Elemente (um 300 v. Chr.)

- eine Reihe von Büchern über den damaligen Stand der Mathematik mit halbwegs einheitlicher Sprache
- verfolgt den eben genannten deduktiven Ansatz (basierend auf Axiomen)
- enthält: Satz des Pythagoras, Winkelsumme im Dreieck, erste Binomische Formel, Satz des Thales, erster Strahlensatz, Ähnlichkeitssätze für Dreiecke, Euklidischer Algorithmus (ggT), unendlich viele Primzahlen, ...
- nach der Bibel das häufigst editierte, kommentierte und übersetzte Werk

Parallelenaxiom

- wurde über Jahrhunderte hinweg versucht aus den anderen herzuleiten
- ist aber notwendig (werden wir später noch etwas konkreter sehen)

Moderne Sichtweise

- die Anschauung konnte Euklid nicht immer komplett vermeiden
- Definitionen wie: Punkt ist, was ohne Teile ist; Linie ist Länge ohne Breite
- Hilbert setzt deduktive Methode konsequent um (*Grundlagen der Geometrie*, 1899)
- Hilbert (1891): »Man muss jederzeit an Stelle von „Punkte, Geraden, Ebenen“ „Tische, Stühle, Bierseidel“ sagen können.«

Modernere Axiomatische Sichtweise

Grundbestandteile

- zunächst inhaltsleere **Grundbegriffe** („Punkt“ und „Tisch“ austauschbar)
- die Grundbegriffe werden von **Axiomen** mit Inhalt gefüllt
(gewissermaßen sind das nur Eigenschaften, die wir uns für die Grundbegriffe wünschen)
- **Sätze**, die ausschließlich aus den Axiomen hergeleitet werden
- **Definitionen** sind nur Abkürzungen um die Notation zu vereinfachen

Wünschenswerte Eigenschaften eines Axiomensystem

- Widerspruchsfreiheit
- Unabhängigkeit (keines der Axiome lässt sich aus einem anderen herleiten)
- Vollständigkeit (jede im System formulierbare Aussage ist beweis- oder widerlegbar)
- man bekommt nicht immer, was man sich wünscht. . .
(siehe Gödelscher Unvollständigkeitssatz)

Vorgehen im Folgenden

- Axiomatischer Aufbau der Geometrie (mit fünf Axiomgruppen I–V)
- Axiomensystem nach Kolmogorov (1977) (äquivalent zu Hilberts System)
- wir gehen davon aus, dass wir grundlegende Dinge wie Zahlen (Peano) und wie Mengenlehre (ZFC) schon zur Verfügung haben

Erste Grundbegriffe: Punkte und Geraden

Definition

Seien $\mathcal{P}$ und $\mathcal{B}$ disjunkte Mengen. Ihre Elemente nennen wir **Punkte** bzw. **Blöcke**. Sei weiter $I \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{B}$. Dann heißt $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ **Inzidenzstruktur**. Wenn $(P, b) \in I$, dann sagen wir, dass P und b **inzident** sind.

Beispiel

- $\mathcal{P}$ ist die Menge der Stühle, $\mathcal{B}$ die Menge der Tische in einem Restaurant
- $(P, b) \in I$, wenn Stuhl P an Tisch b steht

Definition

Eine Inzidenzstruktur heißt **einfach** bzw. **Geometrie**, wenn keine zwei Blöcke zu den selben Punkten inzident sind. Die Blöcke heißen **Geraden**.

Beispiel

- $\mathcal{B} \subseteq 2^{\mathcal{P}}$ und $(P, b) \in I \Leftrightarrow P \in b$
- bezeichne eine solche Inzidenzstruktur mit $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in)$
- man kann leicht zeigen: jede Geometrie ist isomorph zu $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in)$
(für die naheliegende Definition von *isomorph*)

Definition

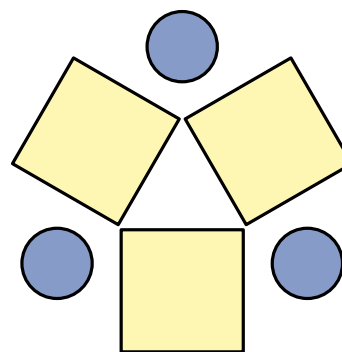
Eine Inzidenzstruktur $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in)$ mit einer Abbildung $d: \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$, die Axiomgruppen I–IV genügt, heißt **absolute Ebene**. Genügt sie Axiomgruppen I–V, so heißt sie **Euklidische Ebene**. Für $A, B \in \mathcal{P}$ ist $d(A, B)$ der **Abstand** von A und B .

Axiomgruppe I: Inzidenzaxiome

- (1) Zu zwei Punkten $A \neq B$ gibt es genau eine Gerade g mit $A \in g$ und $B \in g$.
(Bezeichnung: $g = AB$)
- (2) Jede Gerade enthält mindestens zwei Punkte.
- (3) Es gibt drei Punkte, die nicht derselben Gerade angehören.

Beispiel

- **Hocker** sind Punkte
- **Tische** sind Geraden
- ein Hocker ist inzident zu einem Tisch, wenn er an ihm dran steht



Erfüllt diese Inzidenzstruktur Axiomgruppe I?

Satz Zwei versch. Geraden haben höchstens einen Punkt gemeinsam.

Abstandsaxiome

Definition

Punkte die auf derselben Geraden liegen heißen **kollinear**.

Axiomgruppe II: Abstandsaxiome

- (1) Für alle Punkte A, B gilt: $d(A, B) \geq 0$ und $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$.
- (2) Für alle Punkte A, B gilt: $d(A, B) = d(B, A)$.
- (3) Für alle Punkte A, B, C gilt $d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C)$. Außerdem sind A, B, C genau dann kollinear, wenn eine der folgenden Gleichungen gilt:

$$d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$$

$$d(A, C) + d(C, B) = d(A, B)$$

$$d(B, A) + d(A, C) = d(B, C)$$

Bemerkung

- Axiomgruppe II macht aus der Punktemenge einen metrischen Raum
- Eigenschaft von Geraden: drei Punkte liegen auf einer Geraden $\Leftrightarrow$ Einer stellt auf dem Weg zwischen den Anderen keinen Umweg dar
- dem Einen geben wir gleich einen Namen: er liegt **zwischen** den Anderen

Strecken, Strahlen und Konvexität

Definition

B ist **zwischen** A und C , wenn $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$ und $B \notin \{A, C\}$.

Definition

Für $A, B \in \mathcal{P}$ mit $A \neq B$ heißt $(AB) = \{P \in \mathcal{P} \mid P \text{ liegt zwischen } A \text{ und } B\}$ die **offene Strecke** und $\overline{AB} = (AB) \cup \{A, B\}$ die **Strecke** zwischen A und B . A und B sind die **Endpunkte** und $d(A, B)$ ist die **Länge** der Strecke.

Definition

Seien $A, B \in \mathcal{P}$ mit $A \neq B$. Bezeichne mit AB^+ die Menge der Punkte P mit $P \in \overline{AB}$ oder $B \in \overline{AP}$. Bezeichne mit AB^- die Menge der Punkte P mit $A \in \overline{PB}$. Die Mengen AB^+ und AB^- heißen **Strahlen** mit Anfangspunkt A .

Definition

Eine Menge $M \subseteq \mathcal{P}$ heißt **konvex**, wenn $\overline{AB} \subseteq M$ für alle $A, B \in M$.

Anordnungsaxiome und Halbebenen

Axiomgruppe III: Anordnungsaxiome

- (1) Für jeden Punkt A und jede Zahl $a \in \mathbb{R}$ gibt es auf jedem Strahl mit Anfangspunkt A genau einen Punkt B mit $d(A, B) = a$.
- (2) Jede Gerade g zerlegt die Menge $\mathcal{P} \setminus g$ in zwei nichtleere Teilmengen, sodass:
 - (a) Die Strecke zwischen zwei Punkten, die nicht in derselben Teilmenge liegen, schneidet g .
 - (b) Die Strecke zwischen zwei Punkten, die in derselben Teilmenge liegen, schneidet g nicht.

Definition

Die beiden Mengen heißen **offene Halbebenen** mit **Randgerade** g . Nimmt man g hinzu, so erhält man eine **Halbebene**. Die Halbebene mit Randgrade $g = AB$, die den Punkt $C \notin g$ enthält, bezeichnen wir mit ABC^+ . Die andere mit ABC^- .

Bemerkung

- (1) sorgt dafür, dass es unendlich viele Punkte gibt
- (2) besagt insbesondere, dass Halbebenen konvex sind

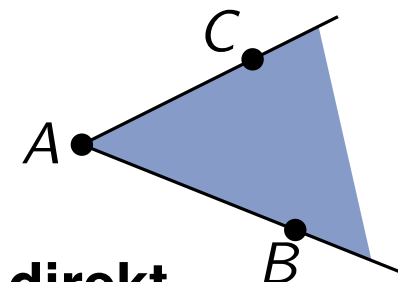
Winkel und Bewegungen

Definition

Die Vereinigung zweier Strahlen heißt **Winkel** $\angle BAC = AB^+ \cup AC^+$, mit **Schenkeln** AB^+ und AC^+ . Er ist **gestreckt**, wenn $\angle BAC = AB$ und der **Nullwinkel**, wenn $AB^+ = AC^+$. $ABC^+ \cap ACB^+$ ist das **Innere** des Winkels.

Definition

Eine surjektive Abbildung $b: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ ist eine **Bewegung**, wenn sie alle Abstände unverändert lässt.



Folgende Eigenschaften erhält man mehr oder weniger direkt

- eine Bewegung ist auch injektiv, da $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$
- Bewegungen erhalten die Zwischenbeziehung, Strecken, Geraden, Halbgeraden, Halbebenen, Winkel, etc.
- für $d(A, B) = d(A', B') > 0$ gibt es höchstens zwei Bewegungen, die A auf A' und B auf B' abbilden

Axiomgruppe IV: Bewegungsaxiom

Für $d(A, B) = d(A', B') > 0$ gibt es mindestens zwei Bewegungen, die A auf A' und B auf B' abbilden.

Das Parallelenaxiom

Definition

Zwei Geraden, die sich nicht schneiden, heißen **parallel**.

Axiomgruppe V: Euklidisches Parallelenaxiom

Zu jeder Geraden g und jedem Punkt $P \notin g$ gibt es höchstens eine Gerade, die P enthält und zu g parallel ist.

Erinnerung

Axiomgruppe I: Inzidenzaxiome

zwei Punkte definieren eine Gerade; jede Gerade enthält zwei Punkte; es gibt drei nicht kollineare Punkte

Axiomgruppe II: Abstandsaxiome

Distanz ist eine Metrik; Gleichheit bei Dreiecksungleichung genau dann, wenn kollinear

Axiomgruppe III: Anordnungsaxiome

in jede Richtung mit jedem Abstand gibt es einen Punkt; Geraden zerlegen Ebene in zwei Halbebenen

Axiomgruppe IV: Bewegungsaxiome

es gibt zwei Bewegungen die gleich lange Strecken aufeinander abbilden (orientierungserhaltend)

Definition

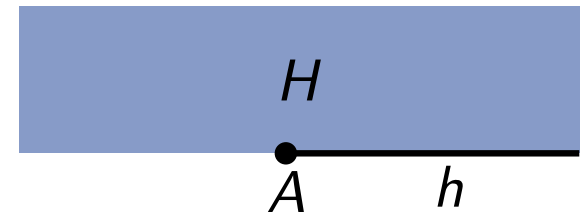
Eine Inzidenzstruktur $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in)$ mit einer Abbildung $d: \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$, die Axiomgruppen I–IV genügt, heißt **absolute Ebene**. Genügt sie Axiomgruppen I–V, so heißt sie **Euklidische Ebene**. Für $A, B \in \mathcal{P}$ ist $d(A, B)$ der **Abstand** von A und B .

Aussagen über die absolute Ebene

Fahnnensatz und spezielle Bewegungen

Definition

Sei $h = AB^+$ ein Strahl und H eine Halbebene mit Randgerade AB . Das Tripel (A, h, H) heißt **Fahne**.



Theorem

(Fahnnensatz)

Für zwei Fahnen (A, h, H) und (A', h', H') gibt es genau eine Bewegung, die (A, h, H) auf (A', h', H') abbildet (also $b(A) = A'$, $b(h) = h'$, $b(H) = H'$).

Definition

Die Bewegung, die (A, h, H) auf (A', h', H') abbildet heißt **Translation**, wenn $A \neq A'$, $h' \subseteq h$ und $H = H'$. Ähnlich kann man **Geraden-**, **Punktspiegelung** und **Drehung** definieren.

Aussagen über die absolute Ebene

Dreiecke und Kongruenz

Definition

Seien A, B, C nicht kollineare Punkte. Dann ist $\Delta ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$ das **Dreieck** mit den **Seiten** $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CA}$.

Definition

Zwei Punktemengen M und M' sind **Kongruent** ($M \cong M'$), wenn es eine Bewegung b gibt mit $b(M) = M'$.

Theorem

(Kongruenzsatz SSS)

Dreiecke ΔABC und $\Delta A'B'C'$ mit $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ und $\overline{CA} \cong \overline{C'A'}$ sind kongruent.

Theorem

(Kongruenzsatz SWS)

Dreiecke ΔABC und $\Delta A'B'C'$ mit $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ und $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ sind kongruent.

Theorem

(Kongruenzsatz WSW)

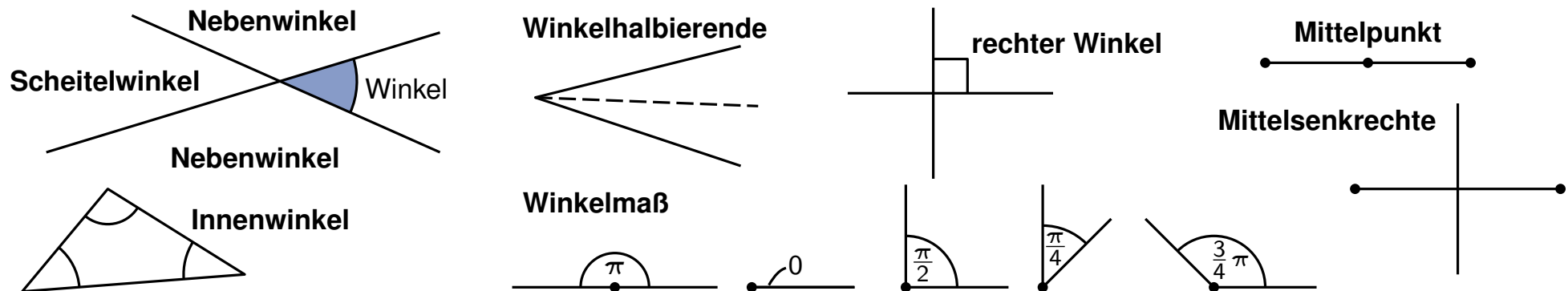
Dreiecke ΔABC und $\Delta A'B'C'$ mit $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ und $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ sind kongruent.

Aussagen über die absolute Ebene

Verschiedenes

Disclaimer

- wir benutzen im Folgenden Begriffe, die wir nicht formal definiert haben
- das sind bekannte Begriffe, von denen ihr vermutlich eine Vorstellung habt
- eine Definition (unter Weglassung der Intuition) ist meist kanonisch



Theoreme

- jeder Winkel ist zu seinem Scheitelwinkel kongruent
- die Winkelhalbierende eines Winkels, der Mittelpunkt einer Strecke und die Mittelsenkrechte einer Strecke sind eindeutig
- Mittelsenkrechte von $\overline{AB} =$ Menge aller Punkte C mit $d(A, C) = d(B, C)$
- die Summe der Innenwinkel(maße) ist maximal π
- gibt es ein Dreieck mit Innenwinkelsumme π , so hat jedes Dreieck IWS π

Zwischenstand

Definition

Eine Inzidenzstruktur $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in)$ mit $d: \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$, die Axiomgruppen I–IV genügt, heißt **absolute Ebene**. Genügt sie Axiomgruppen I–V, so heißt sie **Euklidische Ebene**.

Axiomgruppe II: Abstandsaxiome

Distanz ist eine Metrik; Gleichheit bei Dreiecksungleichung genau dann, wenn kollinear

Axiomgruppe IV: Bewegungsaxiome

es gibt zwei Bewegungen die gleich lange Strecken aufeinander abbilden (orientierungserhaltend)

Axiomgruppe I: Inzidenzaxiome

zwei Punkte definieren eine Gerade; jede Gerade enthält zwei Punkte; es gibt drei nicht kollineare Punkte

Axiomgruppe III: Anordnungsaxiome

in jede Richtung mit jedem Abstand gibt es einen Punkt; Geraden zerlegen Ebene in zwei Halbebenen

Axiomgruppe V: Euklidisches Parallelaxiom

Gerade g und Punkt $P \notin g \Rightarrow$ höchstens eine Gerade parallel zu g durch P

Was passiert, wenn wir das Parallelaxiom negieren?

Axiomgruppe V': hyperbolisches Parallelaxiom

Es gibt eine Gerade und einen Punkt $P \notin g$, sodass es zwei Geraden gibt, die P enthalten und zu g parallel sind.

Definition

Eine Inzidenzstruktur $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in)$ mit einer Abbildung $d: \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$, die Axiomgruppen I–IV, sowie V' genügt, heißt **hyperbolische Ebene**.

Die Hyperbolische Ebene

Was passiert, wenn wir das Parallelenaxiom negieren?

- die Axiome bleiben konsistent
- man erhält mit der hyperbolischen Ebene neben der Euklidischen Ebene ein zweites Modell, das den Axiomen der absoluten Ebene genügt
- alle Sätze der absoluten Ebene gelten auch für die hyperbolische Ebene

Theorem

In der hyperbolischen Ebene gibt es für jede Gerade g und jeden Punkt $P \notin g$ unendlich viele Geraden durch P , die zu g parallel sind.

Theorem

Hyperbolischen Ebene: Die Innenwinkelsumme in Dreiecken ist kleiner π .

Irgendwie ist das alles komisch

- bisher gesehen: Betrachtung der Euklidischen Ebene ohne Intuition
- daraus ergibt sich recht natürlich die hyperbolische Ebene
- uns fehlt aber irgendwie noch die Intuition für die hyperbolische Ebene
- hilfreich: Modelle als Repräsentation der hyperbolischen Ebene

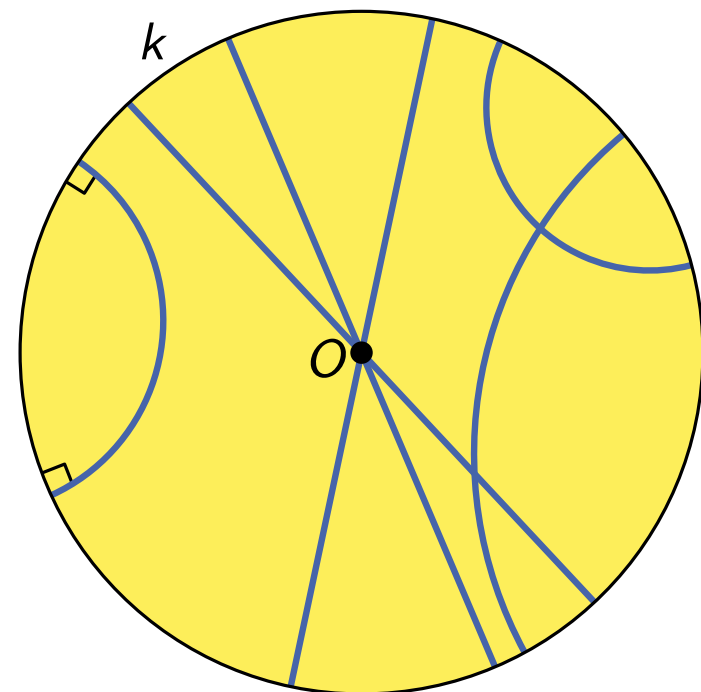
Poincarésches Kreisscheibenmodell (Poincaré disk model)

Punkte

- betrachte einen (Euklidischen) Kreis k mit Radius 1 um den Punkt O
- sei $\mathcal{P}$ die Menge der Punkte im Inneren des Kreises

Geraden

- sei $\mathcal{G}$ die Vereinigung von:
 - Menge der offenen Strecken durch O mit Endpunkten auf k
 - Menge der offenen Kreisbögen in k , die senkrecht auf k stehen



Kurze Pause

Sind die Axiome erfüllt?

Punkte

- betrachte einen (Euklidischen) Kreis k mit Radius 1 um den Punkt O
- sei $\mathcal{P}$ die Menge der Punkte im Inneren des Kreises

Geraden

- sei $\mathcal{G}$ die Vereinigung von:
 - Menge der offenen Strecken durch O mit Endpunkten auf k
 - Menge der offenen Kreisbögen in k , die senkrecht auf k stehen

Axiomgruppe I: Inzidenzaxiome

zwei Punkte definieren eine Gerade; jede Gerade enthält zwei Punkte; es gibt drei nicht kollineare Punkte

Axiomgruppe II: Abstandsaxiome

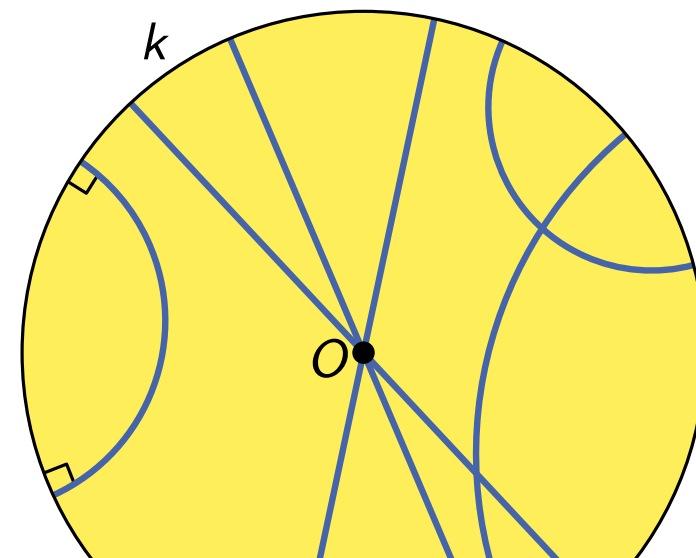
Distanz ist eine Metrik; Gleichheit bei Dreiecksungleichung genau dann, wenn kollinear

Axiomgruppe III: Anordnungsaxiome

in jede Richtung mit jedem Abstand gibt es einen Punkt; Geraden zerlegen Ebene in zwei Halbebenen

Axiomgruppe IV: Bewegungsaxiome

es gibt zwei Bewegungen die gleich lange Strecken aufeinander abbilden (orientierungserhaltend)



Axiomgruppe V': hyperbolisches Parallelenaxiom

es gibt Gerade g und Punkt $P \notin g$, sodass zwei Geraden durch P parallel zu g sind

Poincarésches Kreisscheibenmodell (Poincaré disk model)

Punkte

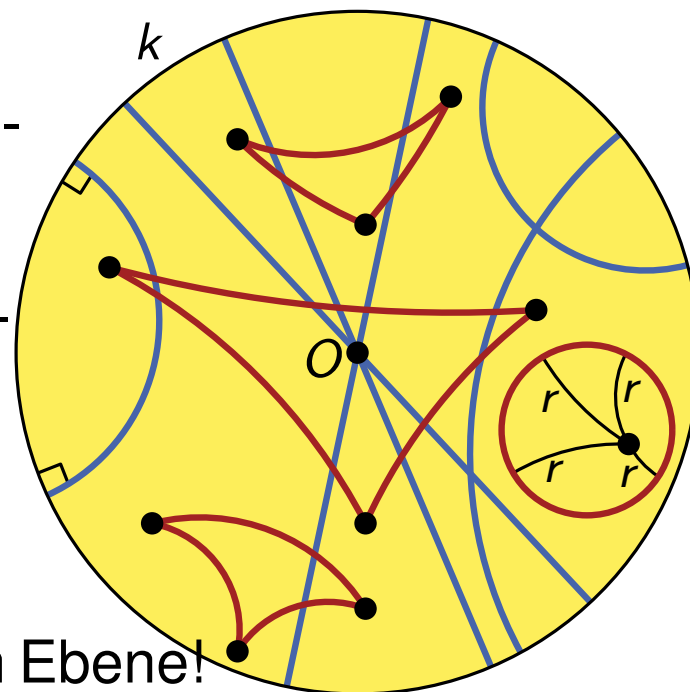
- betrachte einen (Euklidischen) Kreis k mit Radius 1 um den Punkt O
- sei $\mathcal{P}$ die Menge der Punkte im Inneren des Kreises

Geraden

- sei $\mathcal{G}$ die Vereinigung von:
 - Menge der offenen Strecken durch O mit Endpunkten auf k
 - Menge der offenen Kreisbögen in k , die senkrecht auf k stehen

Es gilt

- $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \epsilon)$ zusammen mit einer geeigneten Distanzfunktion erfüllt die Axiome I–IV und V'
- das Modell ist winkelerhaltend
- damit wird „intuitiv offensichtlich“, dass die Innenwinkelsumme eines Dreiecks kleiner π ist
- Distanzen sind stark verzerrt dargestellt
- hyperbolische Kreise sind in der Poincaré Disk Kreise (aber mit anderem Zentrum)
- Punkte auf k gehören nicht zur Hyperbolischen Ebene!

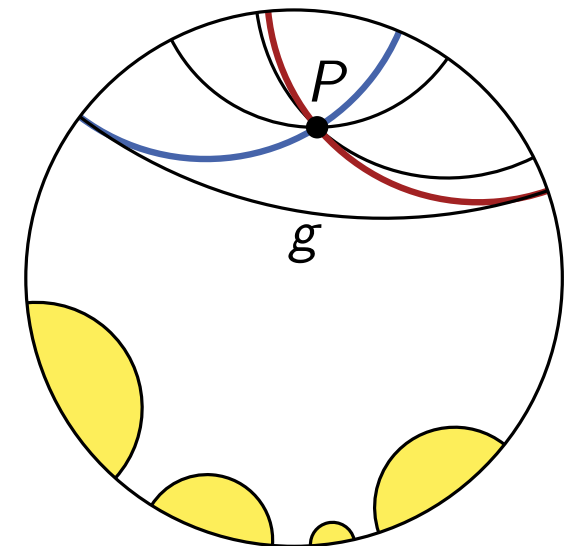


Poincarésches Kreisscheibenmodell

Parallele Geraden und ideale Punkte

Parallele Geraden durch einen Punkt

- man kann leicht mehrere zu g parallele Geraden durch P finden
- zwei Geraden sind gerade so noch parallel
 - diese „schneiden“ g auf dem Rand der Poincaré Disk
 - sie sind die **Grenzparallelen** zu g durch P

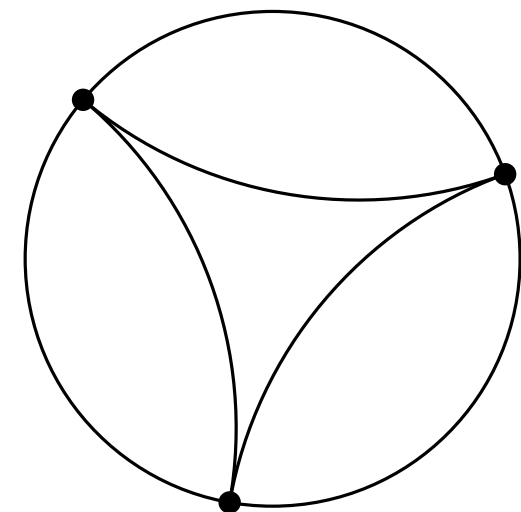


Halbebenen

- es gibt beliebig viele disjunkte Halbebenen (die alle kongruent sind)
- damit gibt es im hyperbolischen irgendwie mehr Platz als im Euklidischen

Ideale Punkte

- die Punkte auf dem Kreis heißen ideale Punkte
- Sind selbst nicht Teil der hyperbolischen Ebene!
- jede Gerade „endet“ in zwei idealen Punkten
- ideales Dreieck: drei Geraden, die drei ideale Punkte „verbinden“
- Verallgemeinerung: ideale n -Ecke



Poincarésches Kreisscheibenmodell

Distanzen

Distanzen

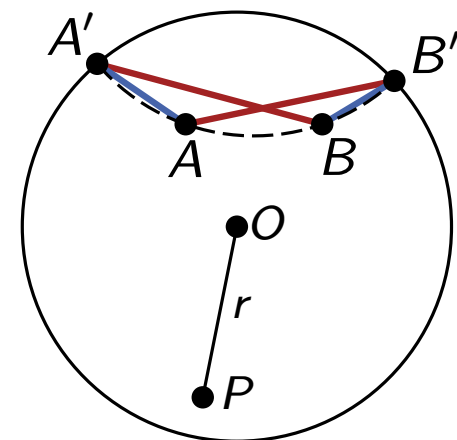
- A und B : zwei Punkte in der Poincaré Disk
- A' und B' : idealen Punkte der Gerade AB (wie im Bild)

- dann gilt:

$d_H(A, B) = \log$
hyperbolische Distanz

$$\frac{d_E(A, B') \cdot d_E(A', B)}{d_E(A, A') \cdot d_E(B, B')}$$

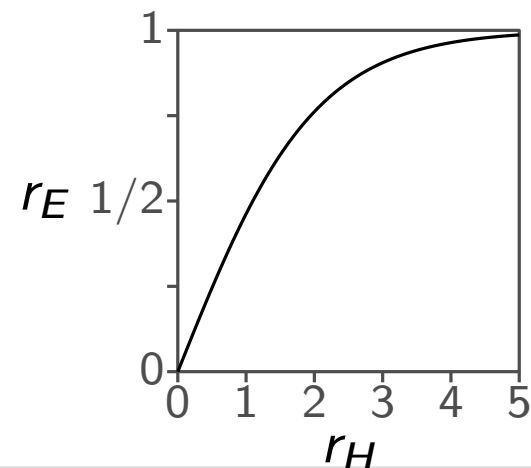
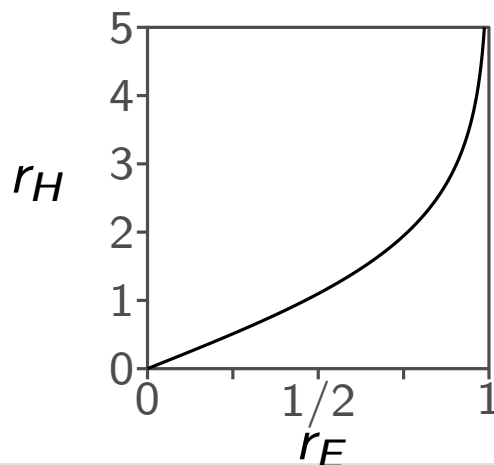
Euklidische Distanz
(in der Poincaré Disk)



Distanzen zum Ursprung

- sei O der Ursprung und P ein Punkt mit $r_E = d_E(O, P)$ und $r_H = d_H(O, P)$

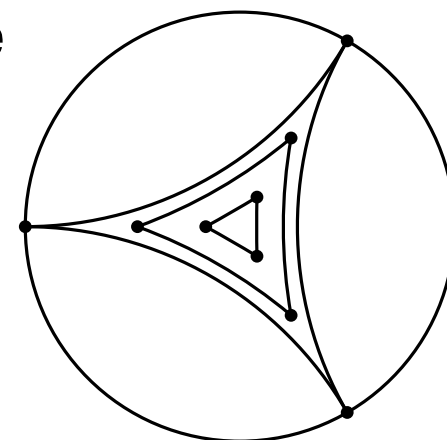
- dann gilt: $r_H = \log \frac{1 + r_E}{1 - r_E} = 2 \operatorname{arctanh}(r_E)$ und $r_E = \frac{e^{r_H} - 1}{e^{r_H} + 1} = \tanh\left(\frac{r_H}{2}\right)$



Fläche in der hyperbolischen Ebene

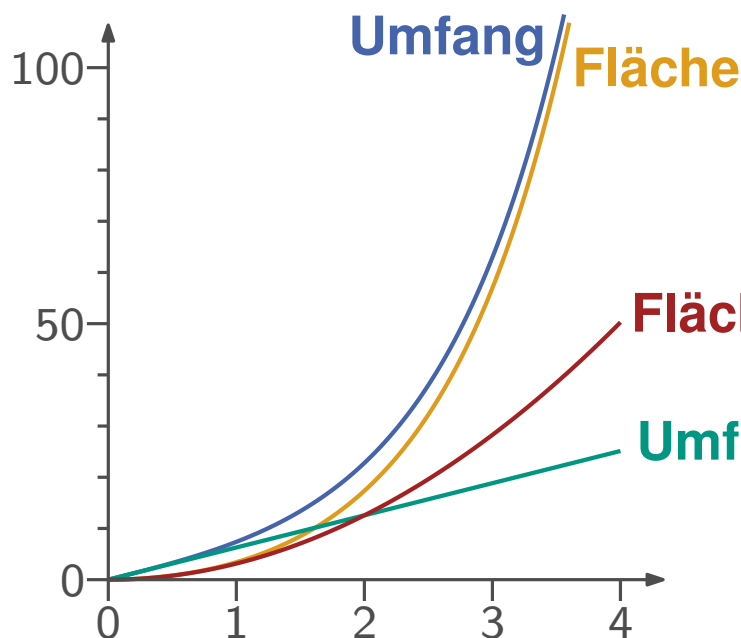
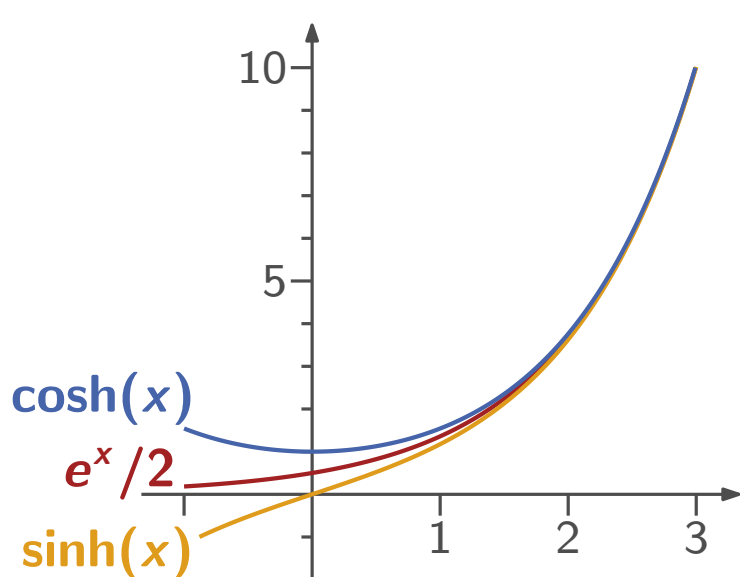
Fläche eines Dreiecks

- Flächeninhalt eines Dreiecks ist $\pi - \text{Innenwinkelsumme}$
- alle Dreiecke haben Flächeninhalt echt kleiner π
- ein ideales Dreieck hat Flächeninhalt π



Kreis mit (hyperbolischem) Radius r

- Umfang: $2\pi \sinh(r)$
- Flächeninhalt: $4\pi \sinh^2(r/2) = 2\pi(\cosh(r) - 1)$



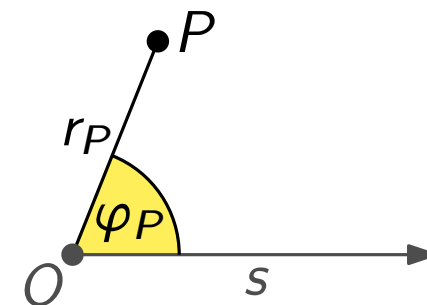
$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

(Native) Polarkoordinaten

Polarkoordinaten

- Referenz: Ursprung O , Strahl s mit Anfangspunkt O
- **Radius** r_P von P : $d(O, P)$
- **Winkel** φ_P von P : Winkel zwischen s und OP
- (r_P, φ_P) sind die **Polarkoordinaten** von P



Native Polarkoordinaten

- d ist die hyperbolische Distanz
- insbesondere ist d **nicht** die Euklidische Distanz in der Poincaré Disk

Distanz zwischen Punkten in Polarkoordinaten

- betrachte zwei Punkte (in nativen Polarkoordinaten)

$$A = (r_A, \varphi_A) \text{ und } B = (r_B, \varphi_B)$$

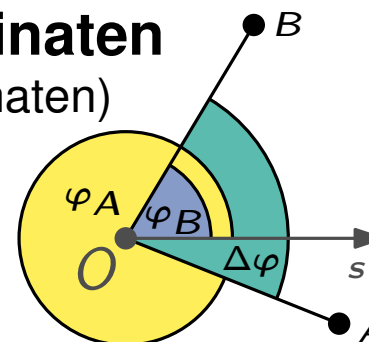
- sei $\Delta\varphi$ ihre Winkeldistanz:

$$\Delta\varphi = \min\{|\varphi_A - \varphi_B|, 2\pi - |\varphi_A - \varphi_B|\}$$

- dann: $d(A, B) = \operatorname{arcosh} [\cosh(r_A) \cosh(r_B) - \sinh(r_A) \sinh(r_B) \cos(\Delta\varphi)]$

$$\approx \log [2 \cdot (e^{r_A}/2 \cdot e^{r_B}/2 - e^{r_A}/2 \cdot e^{r_B}/2 \cdot \cos(\Delta\varphi))]$$

$$= \log [e^{r_A+r_B} \cdot (1 - \cos(\Delta\varphi))/2] = r_A + r_B - \log \left[\frac{2}{1 - \cos(\Delta\varphi)} \right]$$



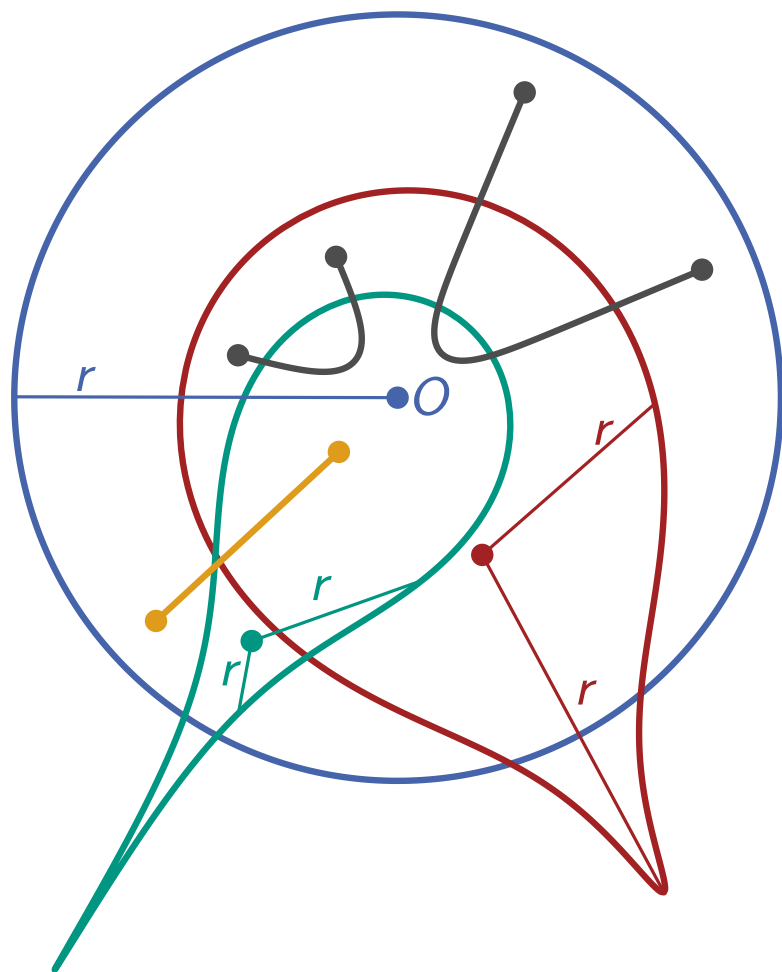
$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Das native Modell

Natives Modell

- nutze nativen Polarkoordinaten für jeden Punkt der hyperbolischen Ebene
- tu so, als wären das ganz normale Euklidische Polarkoordinaten



- Kreise um den Ursprung sind Kreise
- Kreise mit anderen Mittelpunkten sehen Tränenförmig aus
- Strecken auf Ursprungsger. sind Strecken
- ihre zu sehende Länge ist die korrekte hyperbolische Länge
- andere Strecken sind Richtung Ursprung gekrümmt
- Darstellung ist **nicht** Winkelerhaltend

$$d(A, B) \approx r_A + r_B - \log \left[\frac{2}{1 - \cos(\Delta\varphi)} \right]$$

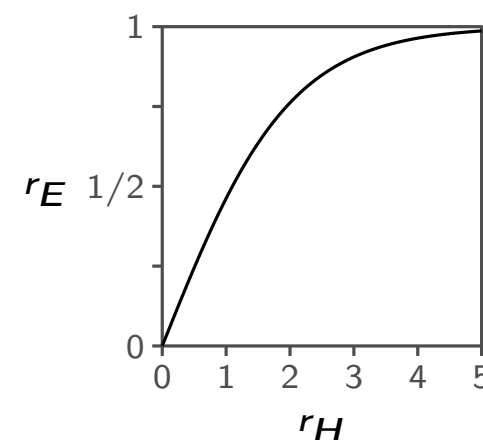
Poincaré vs. nativ

Vorteile der Poincaré Disk

- Darstellung ist Winkelerhaltend
- Geraden sind Euklidische Kreisbögen, Kreise sind Euklidische Kreise
→ das sind uns vertraute Objekten
- wir können unsere Euklidische Intuition bemühen, um Einsichten über die hyperbolische Ebene zu zeigen

Nachteile der Poincaré Disk

- die (euklidische) Distanz vom Ursprung geht sehr schnell gegen 1 für wachsende hyperbolische Distanz
- möchte man etwas hyperbolisches anschauen, das nicht sehr nah am Ursprung liegt, so liegt alles auf dem Rand der Disk und man sieht nichts mehr
- anfälliger für numerische Probleme



Heuristik zur Wahl des Modells

- visuelle Darstellung von hyperbolischen Daten → natives Modell
- Berechnungen auf den Koordinaten → natives Modell
- Verständnisfragen/Beweise → Poincaré Disk

Zusammenfassung

Heute gesehen

- axiomatischer Aufbau der Geometrie: definieren und beweisen ohne die Anschauung zu bemühen
- das Parallelenaxiom und die hyperbolische Ebene
- grundlegende Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen der Euklidischen und der hyperbolischen Ebene
- die Poincaré Disk und das native Modell

Was gibt es sonst noch?

- diverse andere Modelle: obere Halbebene (Poincaré Halbebene), Hyperboloidmodell, Beltrami-Klein-Modell, ...
- andere Koordinatensysteme
- verschiedene Anwendungen in der hyperbolischen Ebene

Nützliche Ressourcen zur hyperbolischen Ebene

„gelbe Seiten“

<http://www.maths.gla.ac.uk/wws/cabripages/hyperbolic/hyperbolic0.html>

- viele nützliche Infos und Formeln zur hyperbolischen Geometrie

Ipelet

<https://git.thms.info/thobl/ipe/src/branch/master/ipelets/poincare>

- Poincaré Modell

Hipe

<https://github.com/maxkatzmann/Hipe>

- hyperbolisches Ipe
- natives Modell

Hydra

<https://github.com/maxkatzmann/hydra>

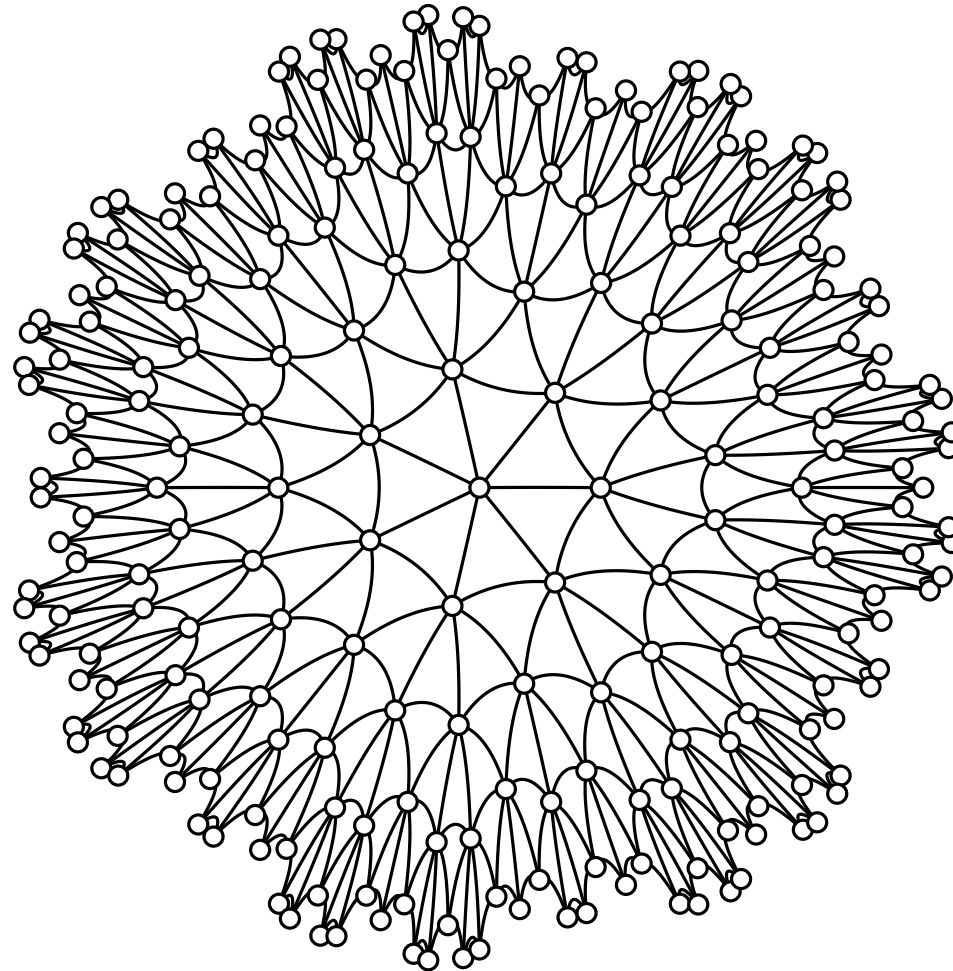
- Programmiersprache zum Erzeugen hyperbolischer Zeichnungen
- natives Modell

Poincaré Disk in c++

<https://github.com/dcoeurjo/PoincareDisk>

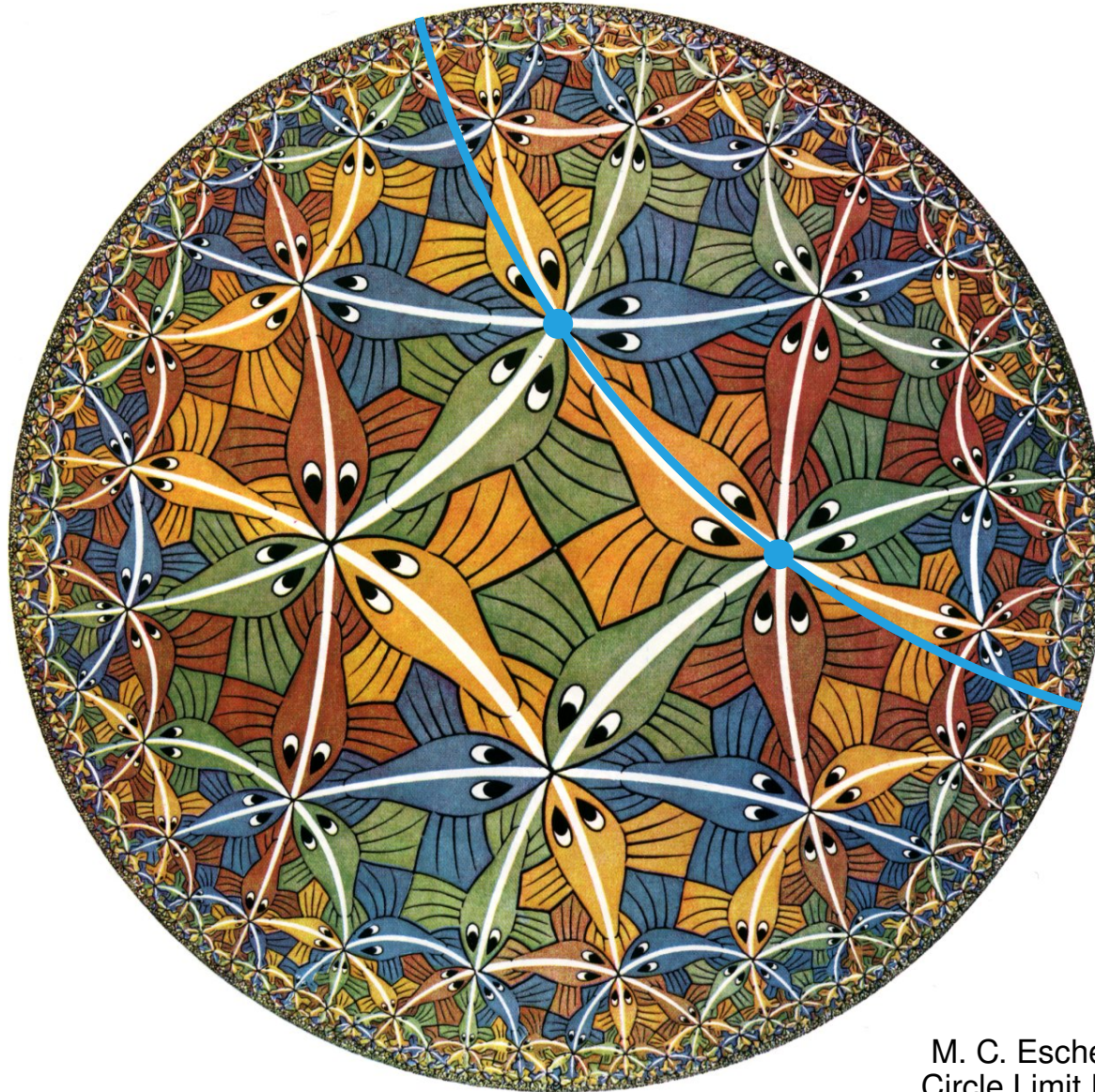
- c++ Bibliothek zum Erzeugen hyperbolischer Zeichnungen
- Poincaré Modell

Bonus: hyperbolisches Gitter natives Modell



Bonus: hyperbolische Fische

Poincaré disk (mehr oder weniger)



M. C. Escher
Circle Limit III

Bonus: hyperbolischer Thomas Poincaré disk

