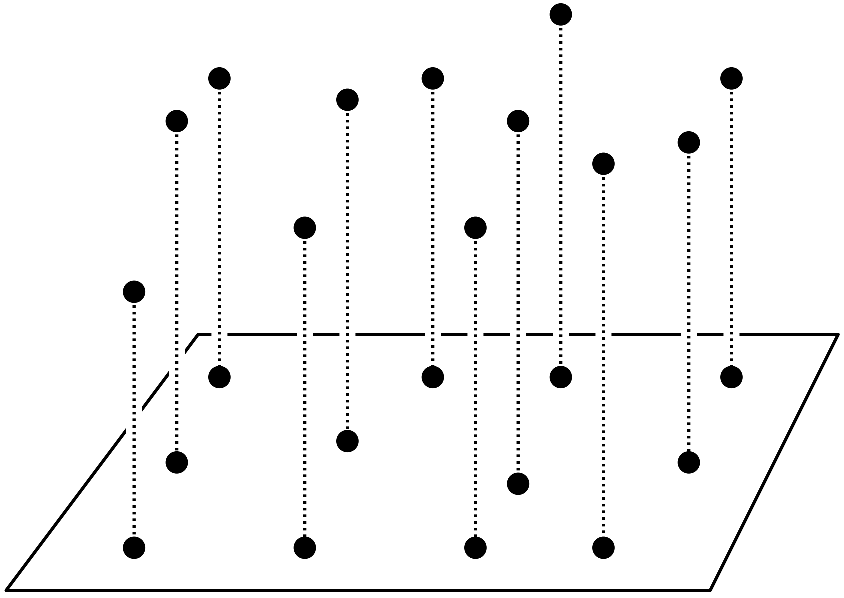
Algorithmische Geometrie

Höheninterpolation & Delaunay-Triangulierung

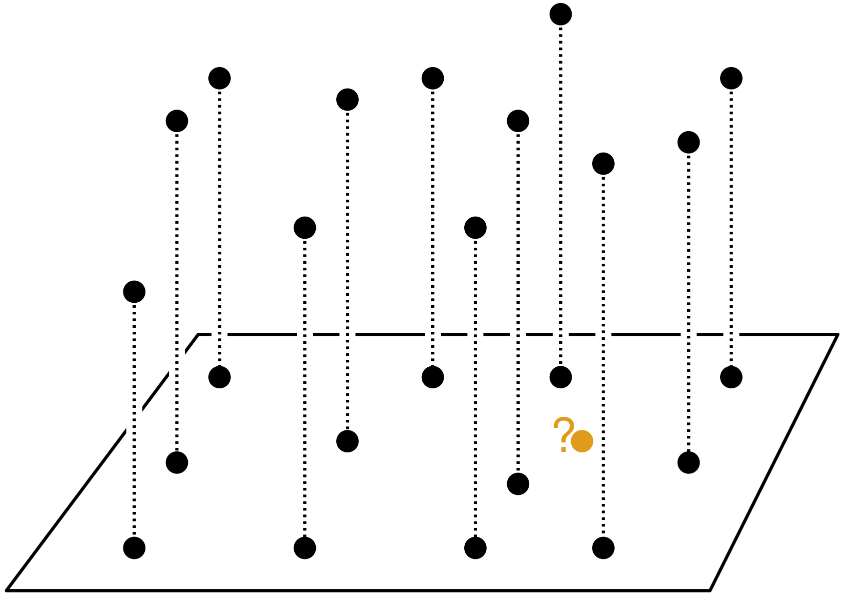
Höheninterpolation

Messpunkte einer Terrain-Höhenmessung



Höheninterpolation

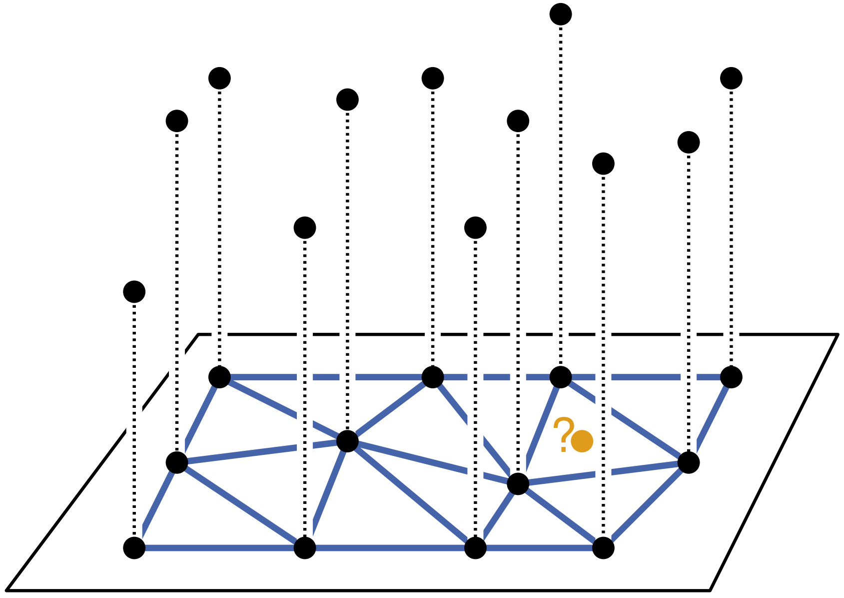
Messpunkte einer Terrain-Höhenmessung



- Wie hoch liegt ein nicht gemessener Punkt?

Höheninterpolation

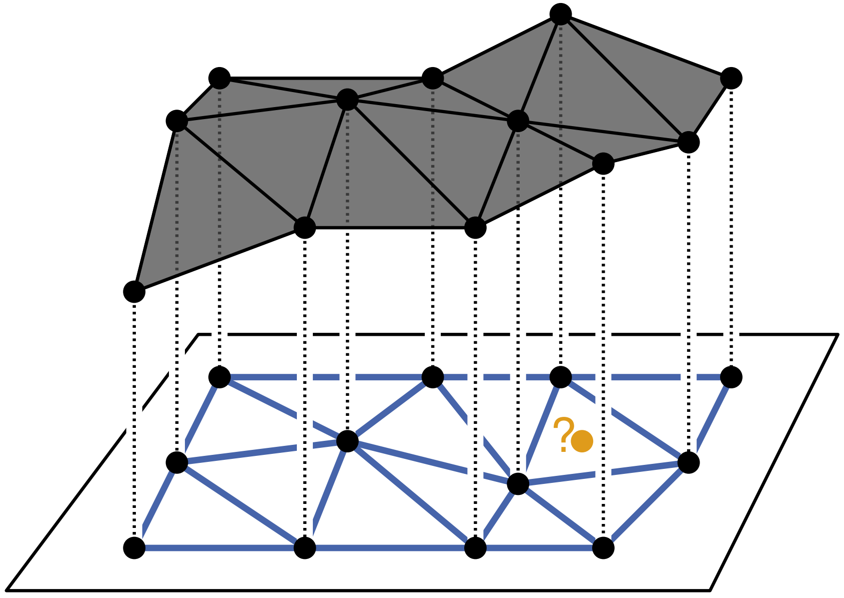
Messpunkte einer Terrain-Höhenmessung



- Wie hoch liegt ein nicht gemessener Punkt?
- trianguliere die Punkte in der Ebene

Höheninterpolation

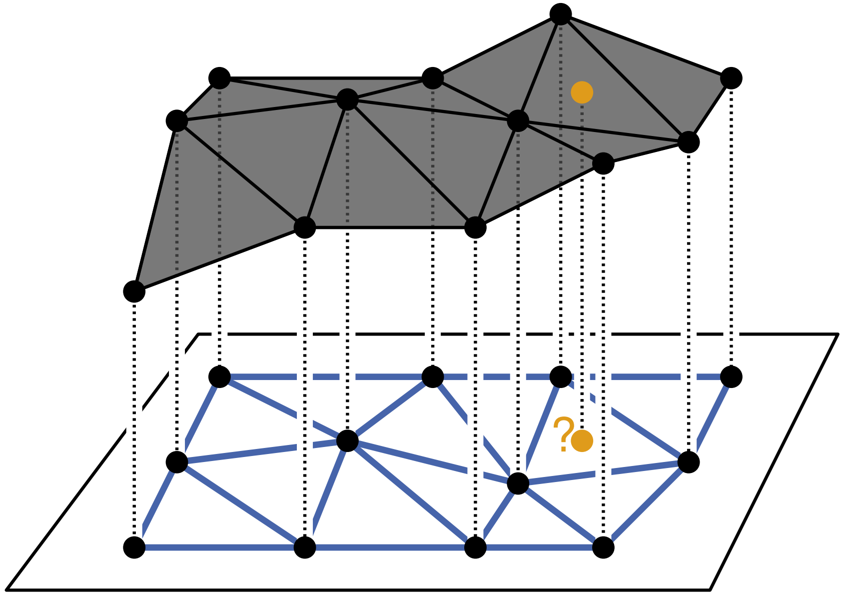
Messpunkte einer Terrain-Höhenmessung



- Wie hoch liegt ein nicht gemessener Punkt?
- trianguliere die Punkte in der Ebene
- $\rightarrow$ Triangulierung der 3D-Messpunkte

Höheninterpolation

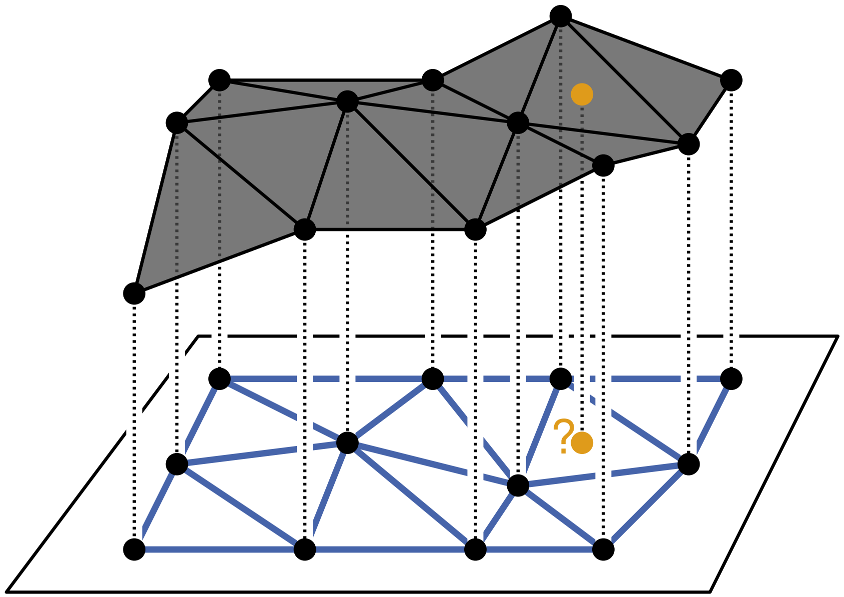
Messpunkte einer Terrain-Höhenmessung



- Wie hoch liegt ein nicht gemessener Punkt?
- trianguliere die Punkte in der Ebene
- $\rightarrow$ Triangulierung der 3D-Messpunkte
- lies Höhe des angefragten Punktes aus der Triangulierung ab

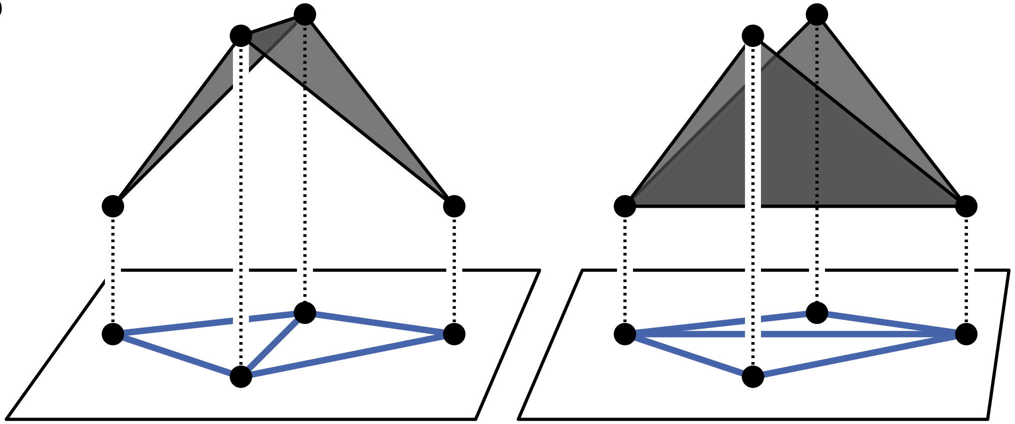
Höheninterpolation

Messpunkte einer Terrain-Höhenmessung



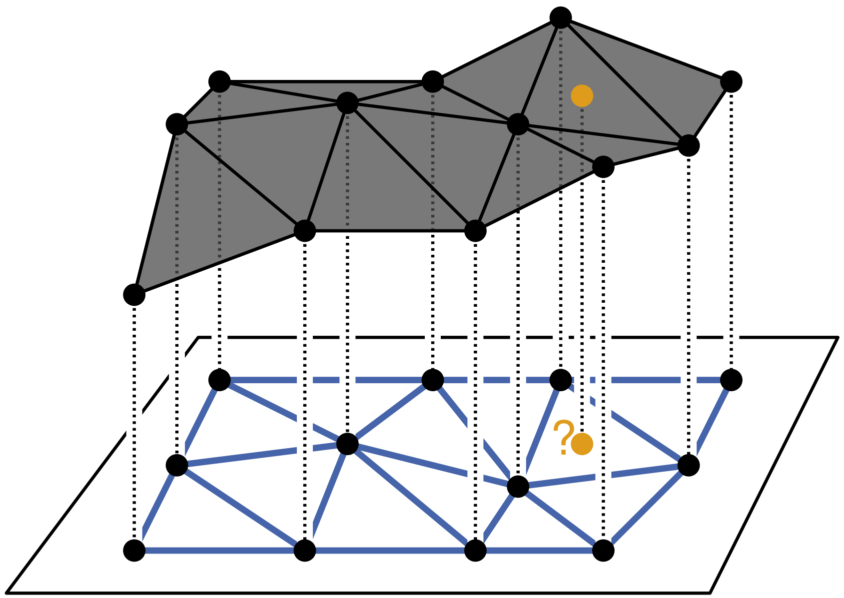
- Wie hoch liegt ein nicht gemessener Punkt?
- trianguliere die Punkte in der Ebene
- $\rightarrow$ Triangulierung der 3D-Messpunkte
- lies Höhe des angefragten Punktes aus der Triangulierung ab

Was ist eine gute Triangulierung?



Höheninterpolation

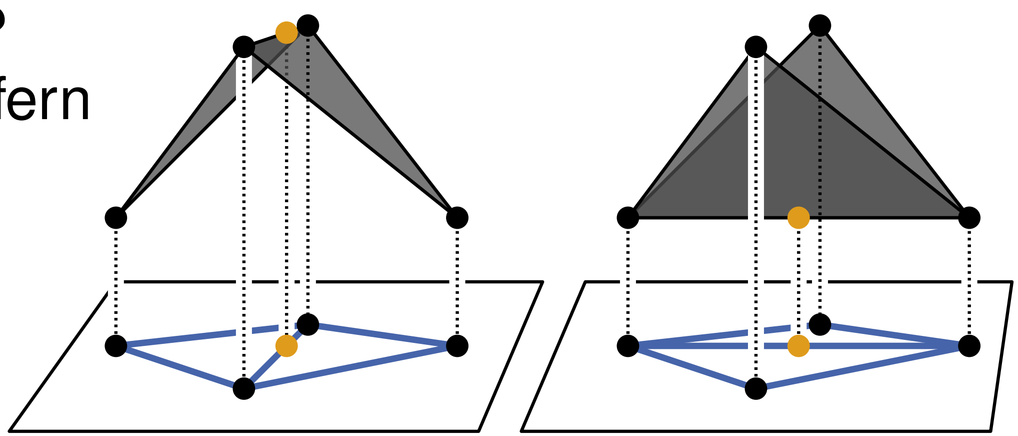
Messpunkte einer Terrain-Höhenmessung



- Wie hoch liegt ein nicht gemessener Punkt?
- trianguliere die Punkte in der Ebene
- → Triangulierung der 3D-Messpunkte
- lies Höhe des angefragten Punktes aus der Triangulierung ab

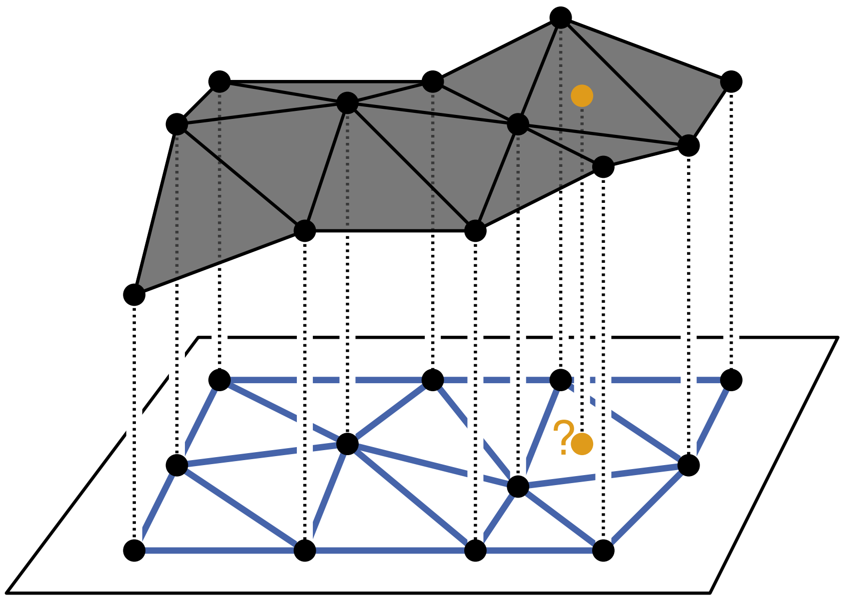
Was ist eine gute Triangulierung?

- verschiedene Triangulierungen liefern sehr unterschiedliche Ergebnisse



Höheninterpolation

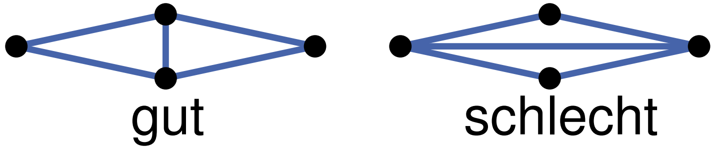
Messpunkte einer Terrain-Höhenmessung

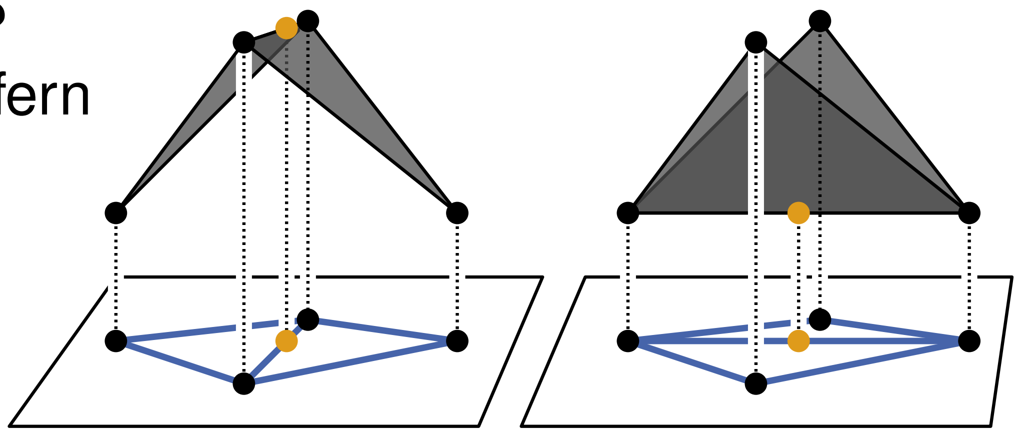


- Wie hoch liegt ein nicht gemessener Punkt?
- trianguliere die Punkte in der Ebene
- $\rightarrow$ Triangulierung der 3D-Messpunkte
- lies Höhe des angefragten Punktes aus der Triangulierung ab

Was ist eine gute Triangulierung?

- verschiedene Triangulierungen liefern sehr unterschiedliche Ergebnisse
- Ziel: vermeide dünne Dreiecke

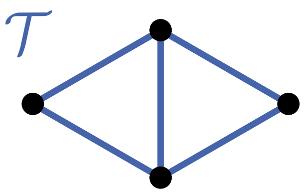




Gute und Schlechte Triangulierungen

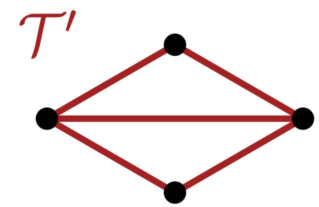
Winkel-Vektor

- betrachte Triangulierung $\mathcal{T}$ einer Punktemenge mit m Dreiecken
- Innenwinkel der Dreiecke, aufsteigend sortiert: $\alpha_1, \ldots, \alpha_{3m}$
- Winkel-Vektor: $\alpha(\mathcal{T}) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{3m})$



$\alpha(\mathcal{T}) = (60^\circ, 60^\circ, 60^\circ, 60^\circ, 60^\circ, 60^\circ)$

$\alpha(\mathcal{T}') = (30^\circ, 30^\circ, 30^\circ, 30^\circ, 120^\circ, 120^\circ)$

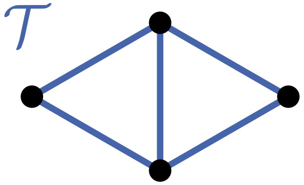


Gute und Schlechte Triangulierungen

Winkel-Vektor

- betrachte Triangulierung $\mathcal{T}$ einer Punktemenge mit m Dreiecken
- Innenwinkel der Dreiecke, aufsteigend sortiert: $\alpha_1, \ldots, \alpha_{3m}$
- Winkel-Vektor: $\alpha(\mathcal{T}) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{3m})$

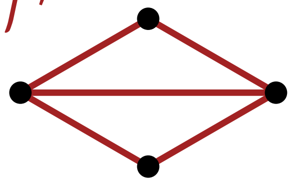
$\mathcal{T}$



$\alpha(\mathcal{T}) = (60^\circ, 60^\circ, 60^\circ, 60^\circ, 60^\circ, 60^\circ)$

$\alpha(\mathcal{T}') = (30^\circ, 30^\circ, 30^\circ, 30^\circ, 120^\circ, 120^\circ)$

$\mathcal{T}'$

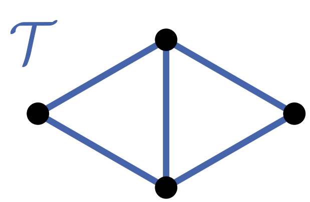


- wir ordnen die Winkel-Vektoren lexikographisch
- also $\alpha(\mathcal{T}) > \alpha(\mathcal{T}') \Leftrightarrow \exists i \in \{1, \ldots, 3m\}\colon a_i > a_i'$ und $\forall j < i\colon a_j = a_j'$

Gute und Schlechte Triangulierungen

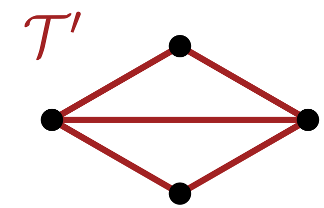
Winkel-Vektor

- betrachte Triangulierung $\mathcal{T}$ einer Punktemenge mit m Dreiecken
- Innenwinkel der Dreiecke, aufsteigend sortiert: $\alpha_1, \dots, \alpha_{3m}$
- Winkel-Vektor: $\alpha(\mathcal{T}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_{3m})$



$\alpha(\mathcal{T}) = (60°, 60°, 60°, 60°, 60°, 60°)$

$\alpha(\mathcal{T}') = (30°, 30°, 30°, 30°, 120°, 120°)$



- wir ordnen die Winkel-Vektoren lexikographisch
- also $\alpha(\mathcal{T}) > \alpha(\mathcal{T}') \Leftrightarrow \exists i \in \{1, \dots, 3m\}\colon a_i > a'_i$ und $\forall j < i\colon a_j = a'_j$

Optimale Triangulierungen

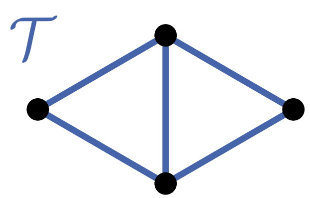
- Triangulierung ist optimal, wenn sie maximal ist (bzgl. dieser Ordnung)
  (also $\mathcal{T}$ optimal $\Leftrightarrow \mathcal{T} \geq \mathcal{T}'$ für alle Triangulierungen $\mathcal{T}'$)

Gute und Schlechte Triangulierungen

Karlsruher Institut für Technologie

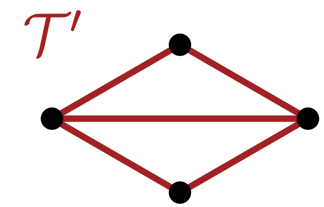
Winkel-Vektor

- betrachte Triangulierung $\mathcal{T}$ einer Punktemenge mit m Dreiecken
- Innenwinkel der Dreiecke, aufsteigend sortiert: $\alpha_1, \ldots, \alpha_{3m}$
- Winkel-Vektor: $\alpha(\mathcal{T}) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{3m})$



$$\alpha(\mathcal{T}) = (60°, 60°, 60°, 60°, 60°, 60°)$$

$$\alpha(\mathcal{T}') = (30°, 30°, 30°, 30°, 120°, 120°)$$



- wir ordnen die Winkel-Vektoren lexikographisch
- also $\alpha(\mathcal{T}) > \alpha(\mathcal{T}') \Leftrightarrow \exists i \in \{1, \ldots, 3m\}\colon a_i > a'_i$ und $\forall j < i\colon a_j = a'_j$

Optimale Triangulierungen

- Triangulierung ist optimal, wenn sie maximal ist (bzgl. dieser Ordnung)
  (also $\mathcal{T}$ optimal $\Leftrightarrow \mathcal{T} \geq \mathcal{T}'$ für alle Triangulierungen $\mathcal{T}'$)

Im Folgenden

- Woran erkennen wir eine optimale Triangulierung?
- Können wir eine optimale Triangulierung berechnen?
- Ist die optimale Triangulierung eindeutig?

Verbotene Kanten

Idee

- verbessere Triangulierung schrittweise durch lokale Veränderungen
- dadurch erreicht man ein lokales Maximum
- Hoffnung: das ist auch ein globales Maximum

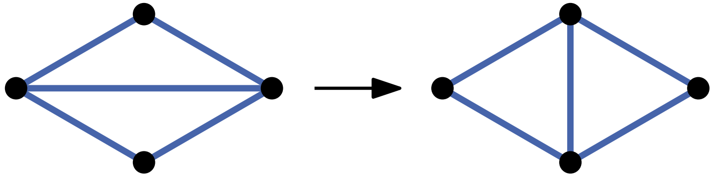
Verbotene Kanten

Idee

- verbessere Triangulierung schrittweise durch lokale Veränderungen
- dadurch erreicht man ein lokales Maximum
- Hoffnung: das ist auch ein globales Maximum

Kanten-Flip

- entferne eine (innere) Kante
- füge die andere Diagonale ein



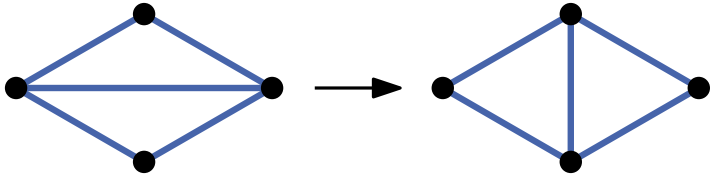
Verbotene Kanten

Idee

- verbessere Triangulierung schrittweise durch lokale Veränderungen
- dadurch erreicht man ein lokales Maximum
- Hoffnung: das ist auch ein globales Maximum

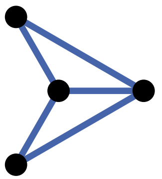
Kanten-Flip

- entferne eine (innere) Kante
- füge die andere Diagonale ein



Beobachtung

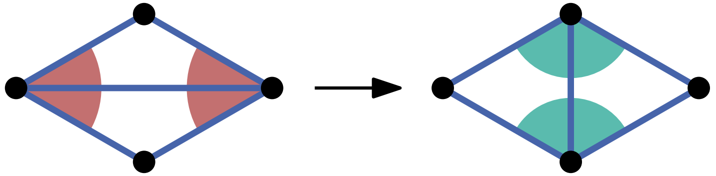
- ist nicht für jede Kante möglich



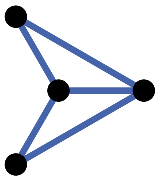
Verbotene Kanten

Idee
- verbessere Triangulierung schrittweise durch lokale Veränderungen
- dadurch erreicht man ein lokales Maximum
- Hoffnung: das ist auch ein globales Maximum

Kanten-Flip
- entferne eine (innere) Kante
- füge die andere Diagonale ein



Beobachtung
- ist nicht für jede Kante möglich
- wir interessieren uns für die vier Winkel an der geflippten Kante



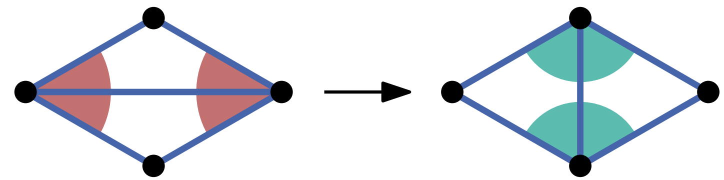
Verbotene Kanten

Idee

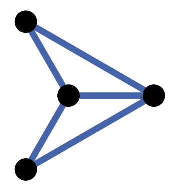
- verbessere Triangulierung schrittweise durch lokale Veränderungen
- dadurch erreicht man ein lokales Maximum
- Hoffnung: das ist auch ein globales Maximum

Kanten-Flip

- entferne eine (innere) Kante
- füge die andere Diagonale ein



Beobachtung



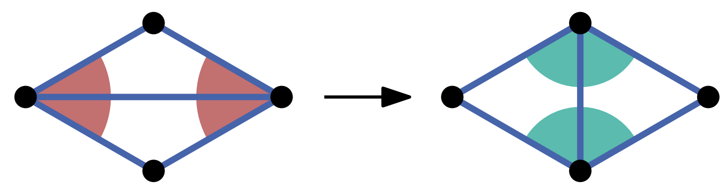
- ist nicht für jede Kante möglich
- wir interessieren uns für die vier Winkel an der geflippten Kante
- Kante ist verboten, wenn ihr Flip den minimalen dieser Winkel vergrößert
- sei e in $\mathcal{T}$ verboten und sei $\mathcal{T}' = \text{flip}(\mathcal{T}, e)$; dann gilt $\alpha(\mathcal{T}') > \alpha(\mathcal{T})$

Verbotene Kanten

Idee

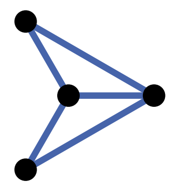
- verbessere Triangulierung schrittweise durch lokale Veränderungen
- dadurch erreicht man ein lokales Maximum
- Hoffnung: das ist auch ein globales Maximum

Kanten-Flip



- entferne eine (innere) Kante
- füge die andere Diagonale ein

Beobachtung



- ist nicht für jede Kante möglich
- wir interessieren uns für die vier Winkel an der geflippten Kante
- Kante ist verboten, wenn ihr Flip den minimalen dieser Winkel vergrößert
- sei e in $\mathcal{T}$ verboten und sei $\mathcal{T}' = \text{flip}(\mathcal{T}, e)$; dann gilt $\alpha(\mathcal{T}') > \alpha(\mathcal{T})$

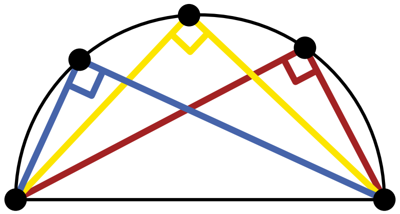
Finde ein lokales Maximum

- solange es eine verbotene Kante gibt: flippe diese

Warum terminiert das?

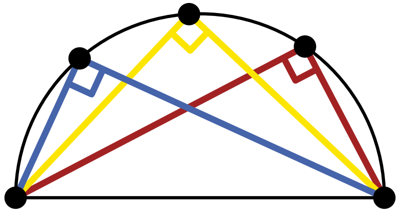
Satz des Thales

Satz des Thales
Die Strecken von einem Punkt auf einem Kreis zu den Endpunkten eines Durchmessers bilden einen rechten Winkel.



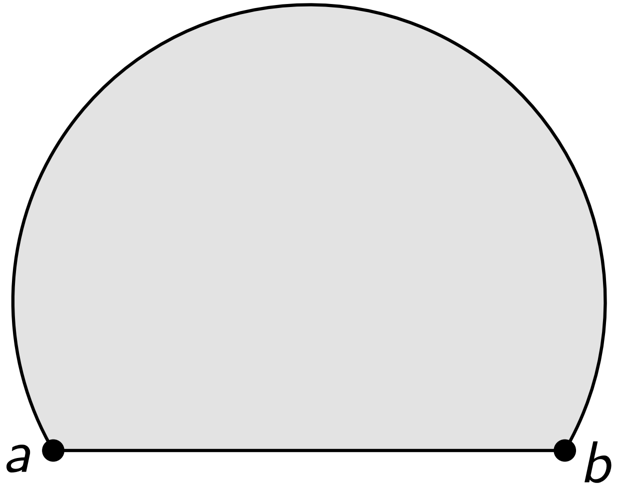
Satz des Thales

Satz des Thales
Die Strecken von einem Punkt auf einem Kreis zu den Endpunkten eines Durchmessers bilden einen rechten Winkel.



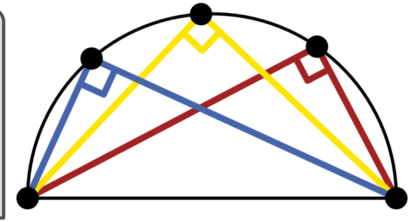
Verallgemeinerung

- halte eine beliebige Sehne eines Kreises fest (Endpunkte: a und b)
- halte außerdem eines der beiden Kreissegmente fest



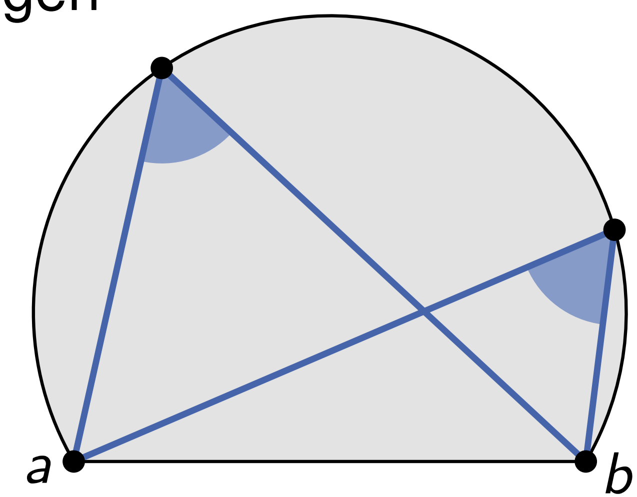
Satz des Thales

Satz des Thales
Die Strecken von einem Punkt auf einem Kreis zu den Endpunkten eines Durchmessers bilden einen rechten Winkel.



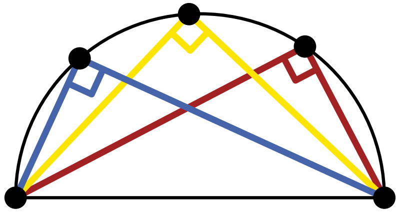
Verallgemeinerung

- halte eine beliebige Sehne eines Kreises fest (Endpunkte: a und b)
- halte außerdem eines der beiden Kreissegmente fest
- die Strecken von jedem Punkt auf dem Kreisbogen zu a und b haben denselben Winkel



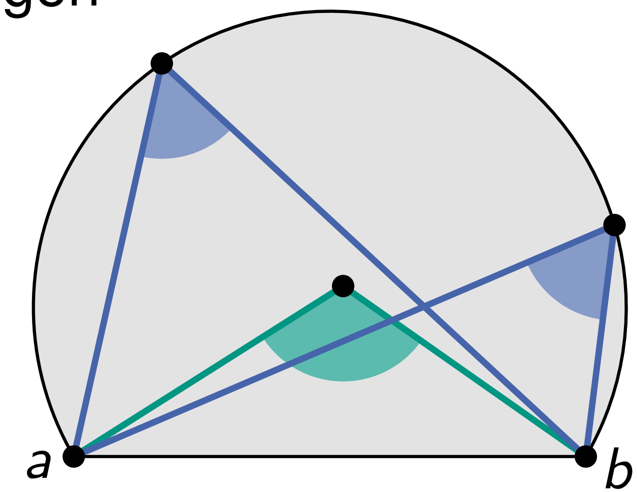
Satz des Thales

Satz des Thales
Die Strecken von einem Punkt auf einem Kreis zu den Endpunkten eines Durchmessers bilden einen rechten Winkel.



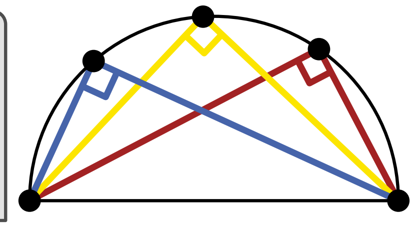
Verallgemeinerung

- halte eine beliebige Sehne eines Kreises fest (Endpunkte: a und b)
- halte außerdem eines der beiden Kreissegmente fest
- die Strecken von jedem Punkt auf dem Kreisbogen zu a und b haben denselben Winkel
- für Punkte innerhalb ist der Winkel größer



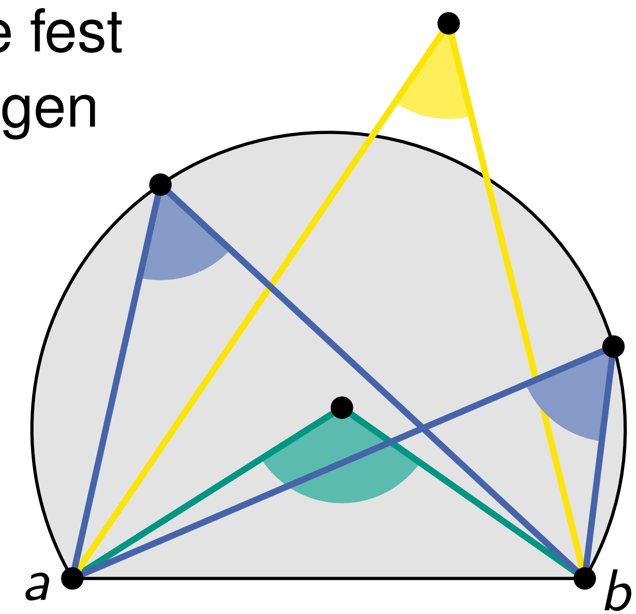
Satz des Thales

Satz des Thales
Die Strecken von einem Punkt auf einem Kreis zu den Endpunkten eines Durchmessers bilden einen rechten Winkel.



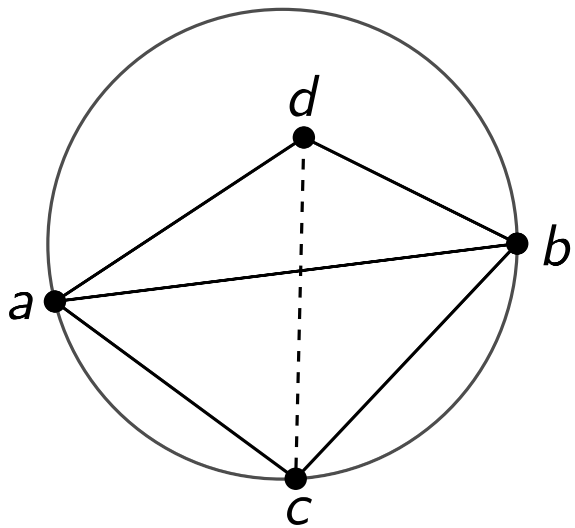
Verallgemeinerung

- halte eine beliebige Sehne eines Kreises fest (Endpunkte: a und b)
- halte außerdem eines der beiden Kreissegmente fest
- die Strecken von jedem Punkt auf dem Kreisbogen zu a und b haben denselben Winkel
- für Punkte innerhalb ist der Winkel größer
- für Punkte außerhalb ist der Winkel kleiner (auf derselben Seite von ab)



Welche Kanten sind verboten?

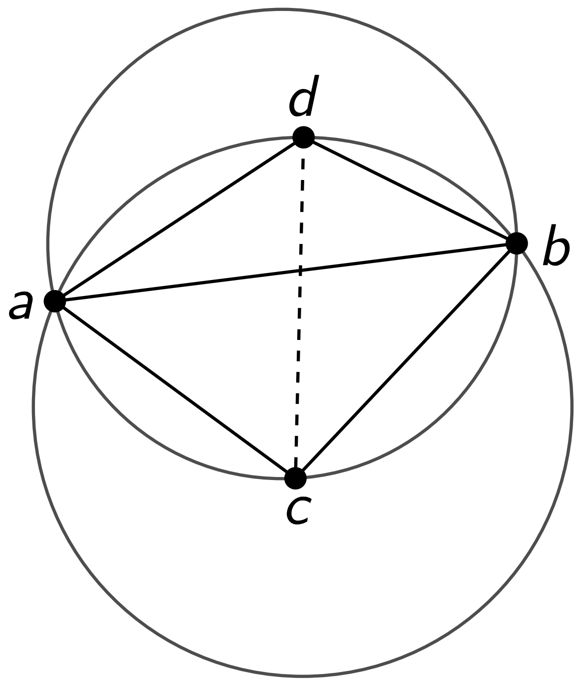
Lemma
Seien $\triangle abc$ und $\triangle abd$ zwei Dreiecke, sodass a, b, c, d in konvexer Lage sind. Der Umkreis von $\triangle abc$ enthält d genau dann, wenn ab verboten ist.



Welche Kanten sind verboten?

Lemma
Seien $\triangle abc$ und $\triangle abd$ zwei Dreiecke, sodass a, b, c, d in konvexer Lage sind. Der Umkreis von $\triangle abc$ enthält d genau dann, wenn ab verboten ist.

Beweis

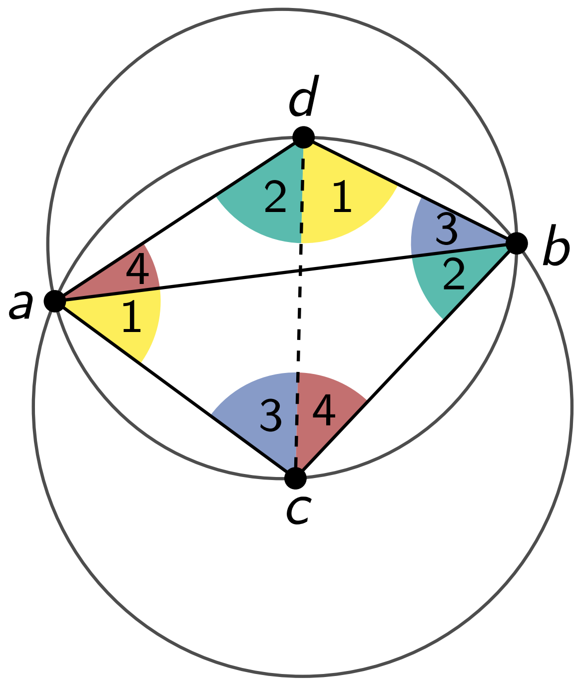


- beachte: der Umkreis um $\triangle abd$ enthält dann c

Welche Kanten sind verboten?

Lemma
Seien $\triangle abc$ und $\triangle abd$ zwei Dreiecke, sodass a, b, c, d in konvexer Lage sind. Der Umkreis von $\triangle abc$ enthält d genau dann, wenn ab verboten ist.

Beweis

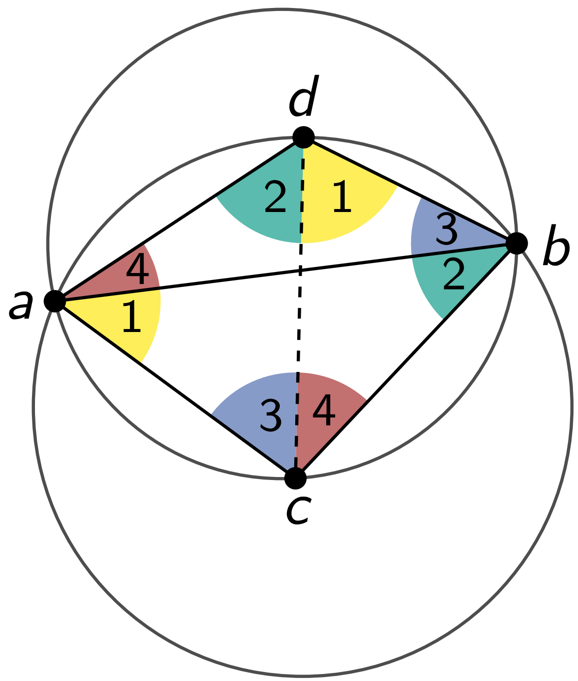


- beachte: der Umkreis um $\triangle abd$ enthält dann c
- betrachte Bijektion zwischen Winkeln bei a und b, sowie Winkeln bei c und d der geflippten Kante

Welche Kanten sind verboten?

Lemma
Seien $\triangle abc$ und $\triangle abd$ zwei Dreiecke, sodass a, b, c, d in konvexer Lage sind. Der Umkreis von $\triangle abc$ enthält d genau dann, wenn ab verboten ist.

Beweis

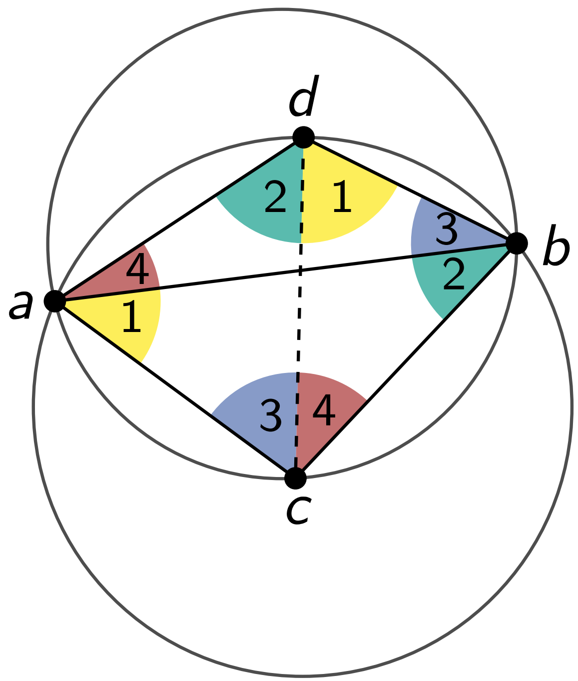


- beachte: der Umkreis um $\triangle abd$ enthält dann c
- betrachte Bijektion zwischen Winkeln bei a und b, sowie Winkeln bei c und d der geflippten Kante
- Behauptung: die Winkel bei ab sind jeweils kleiner als ihr zugehöriger Winkel bei cd

Welche Kanten sind verboten?

Lemma
Seien $\triangle abc$ und $\triangle abd$ zwei Dreiecke, sodass a, b, c, d in konvexer Lage sind. Der Umkreis von $\triangle abc$ enthält d genau dann, wenn ab verboten ist.

Beweis

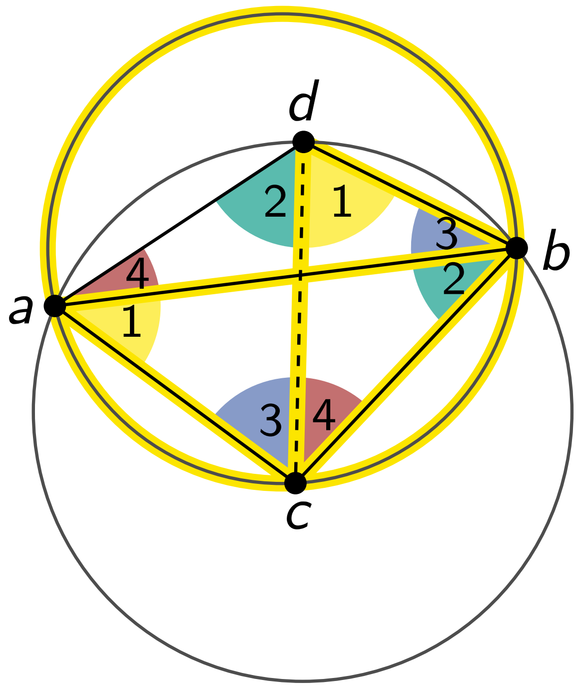


- beachte: der Umkreis um $\triangle abd$ enthält dann c
- betrachte Bijektion zwischen Winkeln bei a und b, sowie Winkeln bei c und d der geflippten Kante
- Behauptung: die Winkel bei ab sind jeweils kleiner als ihr zugehöriger Winkel bei cd
- folgt aus Satz des Thales, wenn man sich die richtigen Dreiecke anschaut

Welche Kanten sind verboten?

Lemma
Seien $\triangle abc$ und $\triangle abd$ zwei Dreiecke, sodass a, b, c, d in konvexer Lage sind. Der Umkreis von $\triangle abc$ enthält d genau dann, wenn ab verboten ist.

Beweis

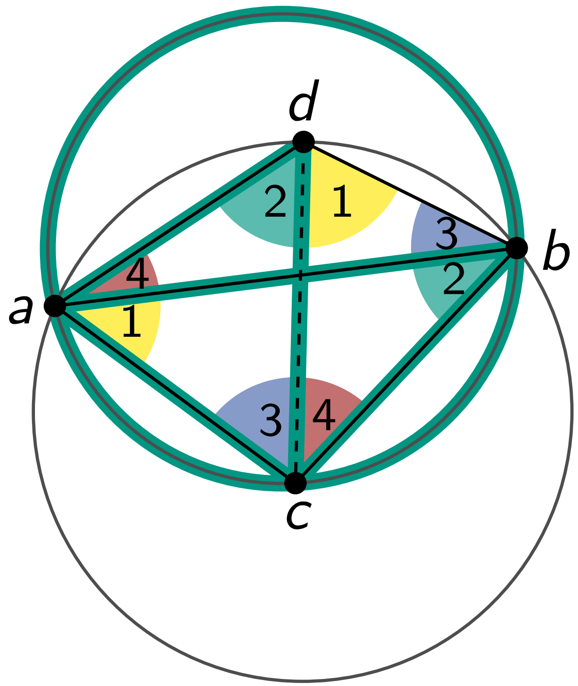


- beachte: der Umkreis um $\triangle abd$ enthält dann c
- betrachte Bijektion zwischen Winkeln bei a und b, sowie Winkeln bei c und d der geflippten Kante
- Behauptung: die Winkel bei ab sind jeweils kleiner als ihr zugehöriger Winkel bei cd
- folgt aus Satz des Thales, wenn man sich die richtigen Dreiecke anschaut

Welche Kanten sind verboten?

Lemma
Seien $\triangle abc$ und $\triangle abd$ zwei Dreiecke, sodass a, b, c, d in konvexer Lage sind. Der Umkreis von $\triangle abc$ enthält d genau dann, wenn ab verboten ist.

Beweis

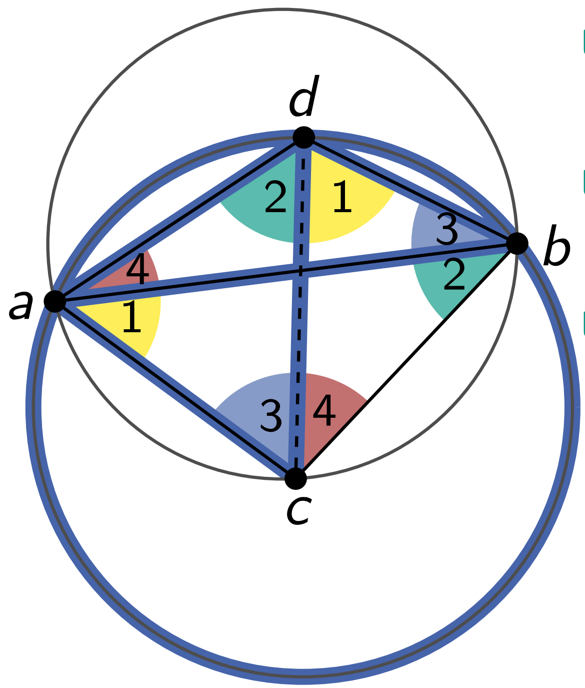


- beachte: der Umkreis um $\triangle abd$ enthält dann c
- betrachte Bijektion zwischen Winkeln bei a und b, sowie Winkeln bei c und d der geflippten Kante
- Behauptung: die Winkel bei ab sind jeweils kleiner als ihr zugehöriger Winkel bei cd
- folgt aus Satz des Thales, wenn man sich die richtigen Dreiecke anschaut

Welche Kanten sind verboten?

Lemma
Seien $\triangle abc$ und $\triangle abd$ zwei Dreiecke, sodass a, b, c, d in konvexer Lage sind. Der Umkreis von $\triangle abc$ enthält d genau dann, wenn ab verboten ist.

Beweis

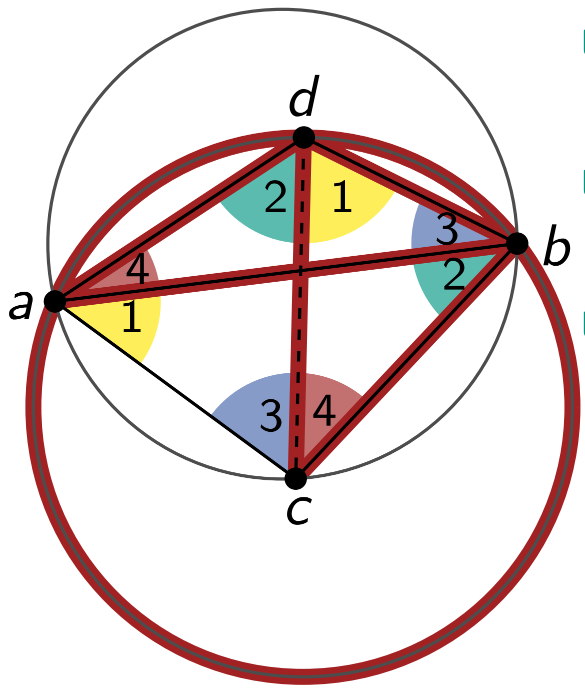


- beachte: der Umkreis um $\triangle abd$ enthält dann c
- betrachte Bijektion zwischen Winkeln bei a und b, sowie Winkeln bei c und d der geflippten Kante
- Behauptung: die Winkel bei ab sind jeweils kleiner als ihr zugehöriger Winkel bei cd
- folgt aus Satz des Thales, wenn man sich die richtigen Dreiecke anschaut

Welche Kanten sind verboten?

Lemma
Seien $\triangle abc$ und $\triangle abd$ zwei Dreiecke, sodass a, b, c, d in konvexer Lage sind. Der Umkreis von $\triangle abc$ enthält d genau dann, wenn ab verboten ist.

Beweis

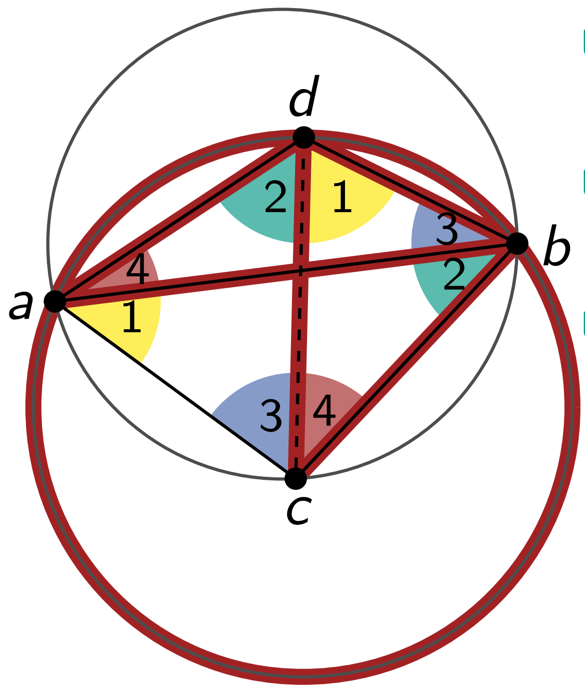


- beachte: der Umkreis um $\triangle abd$ enthält dann c
- betrachte Bijektion zwischen Winkeln bei a und b, sowie Winkeln bei c und d der geflippten Kante
- Behauptung: die Winkel bei ab sind jeweils kleiner als ihr zugehöriger Winkel bei cd
- folgt aus Satz des Thales, wenn man sich die richtigen Dreiecke anschaut

Welche Kanten sind verboten?

Lemma
Seien $\triangle abc$ und $\triangle abd$ zwei Dreiecke, sodass a, b, c, d in konvexer Lage sind. Der Umkreis von $\triangle abc$ enthält d genau dann, wenn ab verboten ist.

Beweis



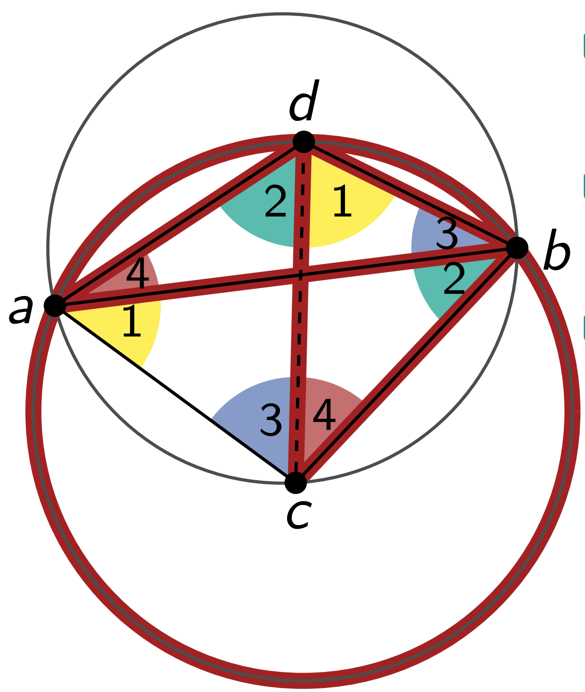
- beachte: der Umkreis um $\triangle abd$ enthält dann c
- betrachte Bijektion zwischen Winkeln bei a und b, sowie Winkeln bei c und d der geflippten Kante
- Behauptung: die Winkel bei ab sind jeweils kleiner als ihr zugehöriger Winkel bei cd
- folgt aus Satz des Thales, wenn man sich die richtigen Dreiecke anschaut

$\Rightarrow$ minimaler Winkel an cd größer
$\Rightarrow$ ab ist verboten

Welche Kanten sind verboten?

Lemma
Seien $\triangle abc$ und $\triangle abd$ zwei Dreiecke, sodass a, b, c, d in konvexer Lage sind. Der Umkreis von $\triangle abc$ enthält d genau dann, wenn ab verboten ist.

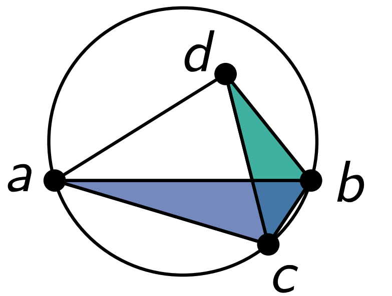
Beweis



- beachte: der Umkreis um $\triangle abd$ enthält dann c
- betrachte Bijektion zwischen Winkeln bei a und b, sowie Winkeln bei c und d der geflippten Kante
- Behauptung: die Winkel bei ab sind jeweils kleiner als ihr zugehöriger Winkel bei cd
- folgt aus Satz des Thales, wenn man sich die richtigen Dreiecke anschaut

$\Rightarrow$ minimaler Winkel an cd größer
$\Rightarrow$ ab ist verboten

- Umkehrung folgt im Prinzip analog durch Betrachtung des minimalen Winkels



Verbotene Kanten und leere Umkreise

Lemma
Seien $\triangle abc$ und $\triangle abd$ zwei Dreiecke, sodass a, b, c, d in konvexer Lage sind. Der Umkreis von $\triangle abc$ enthält d genau dann, wenn ab verboten ist.

Theorem
Eine Triangulierung enthält eine verbotene Kante genau dann, wenn der Umkreis eines Dreiecks einen Knoten enthält.

Verbotene Kanten und leere Umkreise

Lemma
Seien $\triangle abc$ und $\triangle abd$ zwei Dreiecke, sodass a, b, c, d in konvexer Lage sind. Der Umkreis von $\triangle abc$ enthält d genau dann, wenn ab verboten ist.

Theorem
Eine Triangulierung enthält eine verbotene Kante genau dann, wenn der Umkreis eines Dreiecks einen Knoten enthält.

Beweis

- „$\Rightarrow$“: folgt aus dem Lemma

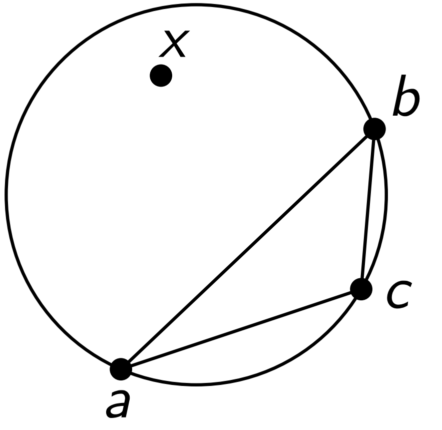
Verbotene Kanten und leere Umkreise

Lemma
Seien $\triangle abc$ und $\triangle abd$ zwei Dreiecke, sodass a, b, c, d in konvexer Lage sind. Der Umkreis von $\triangle abc$ enthält d genau dann, wenn ab verboten ist.

Theorem
Eine Triangulierung enthält eine verbotene Kante genau dann, wenn der Umkreis eines Dreiecks einen Knoten enthält.

Beweis

- „$\Rightarrow$“: folgt aus dem Lemma
- „$\Leftarrow$“: Annahme: keine verbotene Kante, aber Umkreis von $\triangle abc$ enthält x



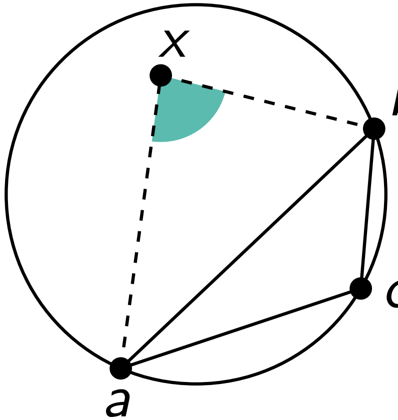
Verbotene Kanten und leere Umkreise

Lemma
Seien $\triangle abc$ und $\triangle abd$ zwei Dreiecke, sodass a, b, c, d in konvexer Lage sind. Der Umkreis von $\triangle abc$ enthält d genau dann, wenn ab verboten ist.

Theorem
Eine Triangulierung enthält eine verbotene Kante genau dann, wenn der Umkreis eines Dreiecks einen Knoten enthält.

Beweis

- „$\Rightarrow$“: folgt aus dem Lemma
- „$\Leftarrow$“: Annahme: keine verbotene Kante, aber Umkreis von $\triangle abc$ enthält x
- wähle $(\triangle abc, x)$ mit dieser Eigenschaft, sodass $\angle axb$ maximal



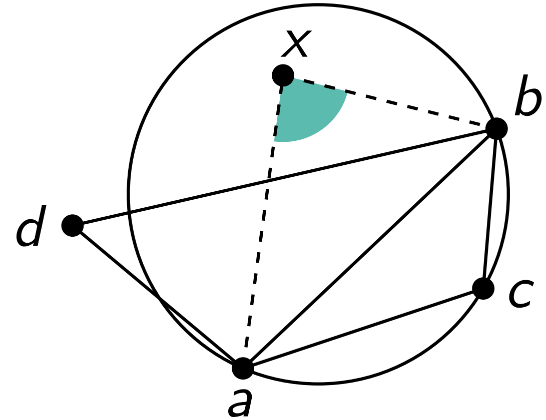
Verbotene Kanten und leere Umkreise

Lemma
Seien $\triangle abc$ und $\triangle abd$ zwei Dreiecke, sodass a, b, c, d in konvexer Lage sind. Der Umkreis von $\triangle abc$ enthält d genau dann, wenn ab verboten ist.

Theorem
Eine Triangulierung enthält eine verbotene Kante genau dann, wenn der Umkreis eines Dreiecks einen Knoten enthält.

Beweis

- „$\Rightarrow$“: folgt aus dem Lemma
- „$\Leftarrow$“: Annahme: keine verbotene Kante, aber Umkreis von $\triangle abc$ enthält x
- wähle $(\triangle abc, x)$ mit dieser Eigenschaft, sodass $\angle axb$ maximal
- betrachte anders Dreieck an $\triangle abd$ an ab



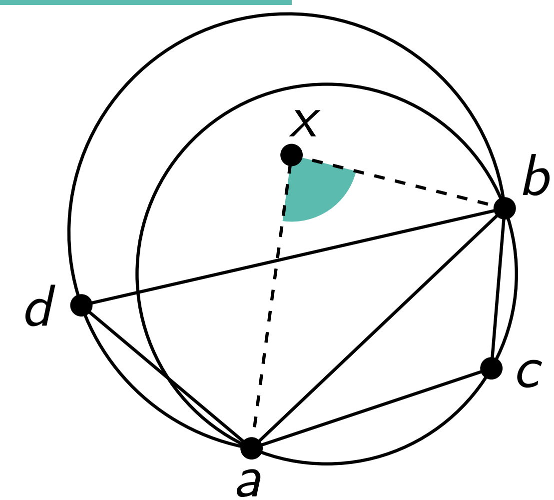
Verbotene Kanten und leere Umkreise

Lemma
Seien $\triangle abc$ und $\triangle abd$ zwei Dreiecke, sodass a, b, c, d in konvexer Lage sind. Der Umkreis von $\triangle abc$ enthält d genau dann, wenn ab verboten ist.

Theorem
Eine Triangulierung enthält eine verbotene Kante genau dann, wenn der Umkreis eines Dreiecks einen Knoten enthält.

Beweis

- „$\Rightarrow$“: folgt aus dem Lemma
- „$\Leftarrow$“: Annahme: keine verbotene Kante, aber Umkreis von $\triangle abc$ enthält x
- wähle $(\triangle abc, x)$ mit dieser Eigenschaft, sodass $\angle axb$ maximal
- betrachte anders Dreieck an $\triangle abd$ an ab
- Umkreis von $\triangle abd$ enthält ebenfalls x



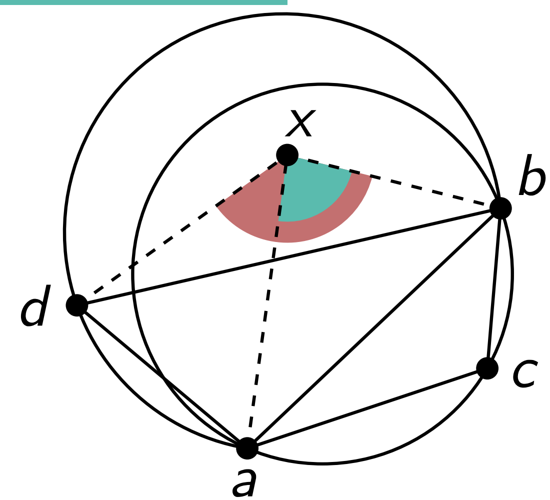
Verbotene Kanten und leere Umkreise

Lemma
Seien $\triangle abc$ und $\triangle abd$ zwei Dreiecke, sodass a, b, c, d in konvexer Lage sind. Der Umkreis von $\triangle abc$ enthält d genau dann, wenn ab verboten ist.

Theorem
Eine Triangulierung enthält eine verbotene Kante genau dann, wenn der Umkreis eines Dreiecks einen Knoten enthält.

Beweis

- „$\Rightarrow$“: folgt aus dem Lemma
- „$\Leftarrow$“: Annahme: keine verbotene Kante, aber Umkreis von $\triangle abc$ enthält x
- wähle $(\triangle abc, x)$ mit dieser Eigenschaft, sodass $\angle axb$ maximal
- betrachte anders Dreieck an $\triangle abd$ an ab
- Umkreis von $\triangle abd$ enthält ebenfalls x
- $\angle dxb$ ist größer als $\angle axb$ $\rightarrow$ Widerspruch



Lokal maximale Triangulierung

Bisher gesehen

- es gibt keine verbotene Kante
- die Triangulierung ist lokal maximal
- der Umkreis jedes Dreiecks enthält keinen Knoten

äquivalent

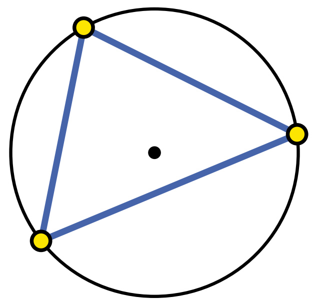
Lokal maximale Triangulierung

Bisher gesehen

- es gibt keine verbotene Kante
- die Triangulierung ist lokal maximal
- der Umkreis jedes Dreiecks enthält keinen Knoten

äquivalent

Für lokal optimale Triangulierungen folgt



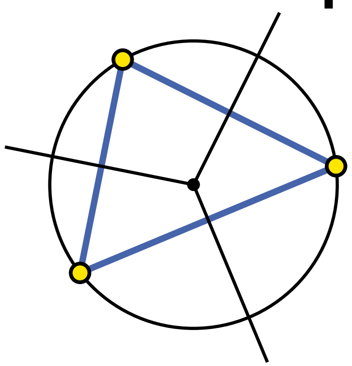
Lokal maximale Triangulierung

Bisher gesehen

- es gibt keine verbotene Kante
- die Triangulierung ist lokal maximal
- der Umkreis jedes Dreiecks enthält keinen Knoten

äquivalent

Für lokal optimale Triangulierungen folgt



- für jedes Dreieck ist der Umkreis-Mittelpunkt ein Voronoi-Knoten

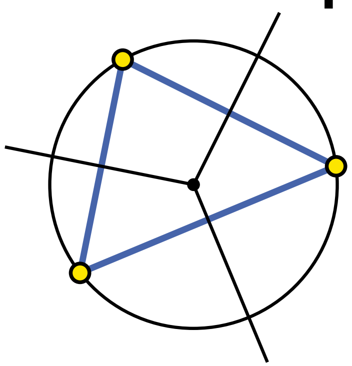
Lokal maximale Triangulierung

Bisher gesehen

- es gibt keine verbotene Kante
- die Triangulierung ist lokal maximal
- der Umkreis jedes Dreiecks enthält keinen Knoten

äquivalent

Für lokal optimale Triangulierungen folgt



- für jedes Dreieck ist der Umkreis-Mittelpunkt ein Voronoi-Knoten
- die Kanten des Dreiecks entsprechen den Voronoi-Kanten inzident zum Voronoi-Knoten

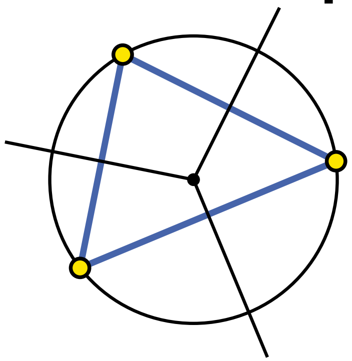
Lokal maximale Triangulierung

Bisher gesehen

- es gibt keine verbotene Kante
- die Triangulierung ist lokal maximal
- der Umkreis jedes Dreiecks enthält keinen Knoten

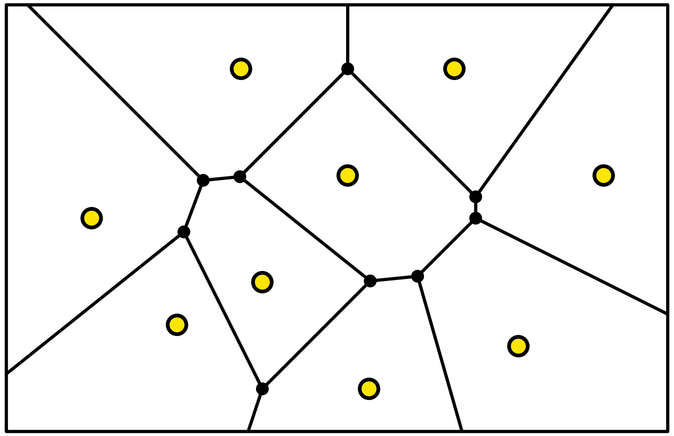
} äquivalent

Für lokal optimale Triangulierungen folgt



- für jedes Dreieck ist der Umkreis-Mittelpunkt ein Voronoi-Knoten
- die Kanten des Dreiecks entsprechen den Voronoi-Kanten inzident zum Voronoi-Knoten

  $\Rightarrow$ wir erhalten den Dualgraph des Voronoi-Diagramms



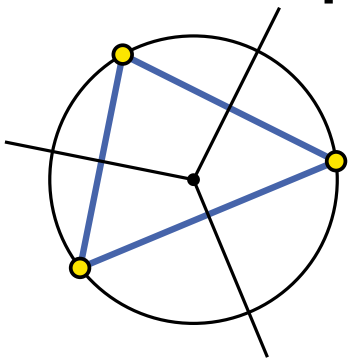
Lokal maximale Triangulierung

Bisher gesehen

- es gibt keine verbotene Kante
- die Triangulierung ist lokal maximal
- der Umkreis jedes Dreiecks enthält keinen Knoten

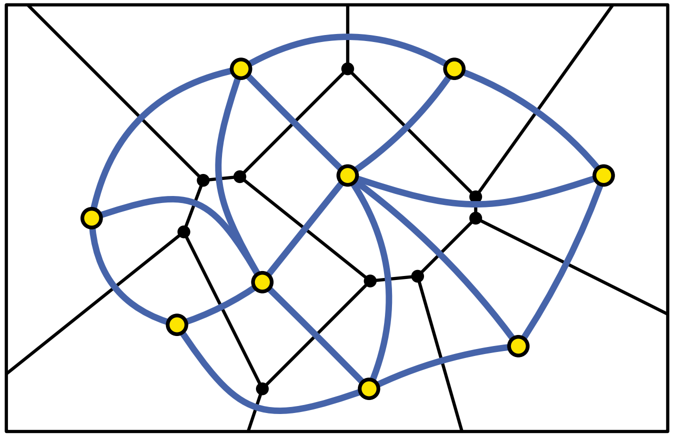
} äquivalent

Für lokal optimale Triangulierungen folgt



- für jedes Dreieck ist der Umkreis-Mittelpunkt ein Voronoi-Knoten
- die Kanten des Dreiecks entsprechen den Voronoi-Kanten inzident zum Voronoi-Knoten

$\Rightarrow$ wir erhalten den Dualgraph des Voronoi-Diagramms



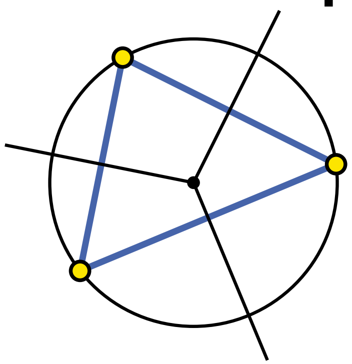
Lokal maximale Triangulierung

Bisher gesehen

- es gibt keine verbotene Kante
- die Triangulierung ist lokal maximal
- der Umkreis jedes Dreiecks enthält keinen Knoten

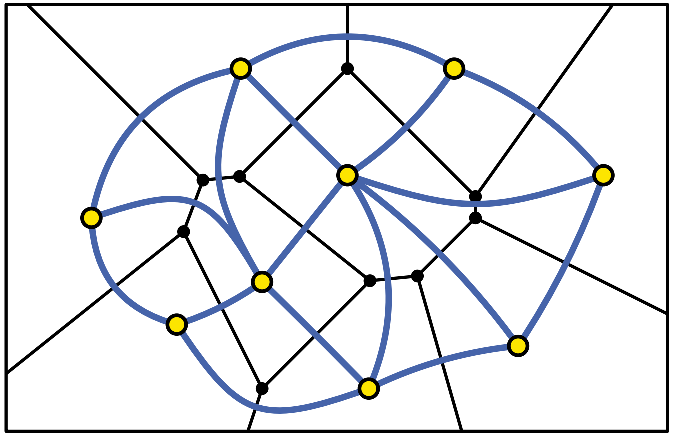
} äquivalent

Für lokal optimale Triangulierungen folgt



- für jedes Dreieck ist der Umkreis-Mittelpunkt ein Voronoi-Knoten
- die Kanten des Dreiecks entsprechen den Voronoi-Kanten inzident zum Voronoi-Knoten

$\Rightarrow$ wir erhalten den Dualgraph des Voronoi-Diagramms



Umgekehrt gilt für den Dualgraph

- jede Facette ist ein Dreieck

(Annahme: keine vier Knoten auf dem gleichen Kreis)

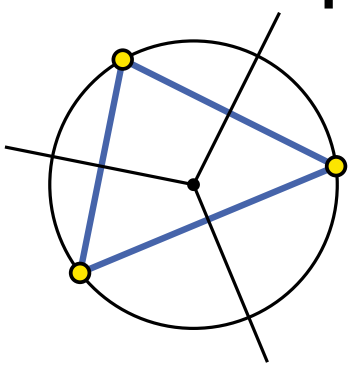
Lokal maximale Triangulierung

Bisher gesehen

- es gibt keine verbotene Kante
- die Triangulierung ist lokal maximal
- der Umkreis jedes Dreiecks enthält keinen Knoten

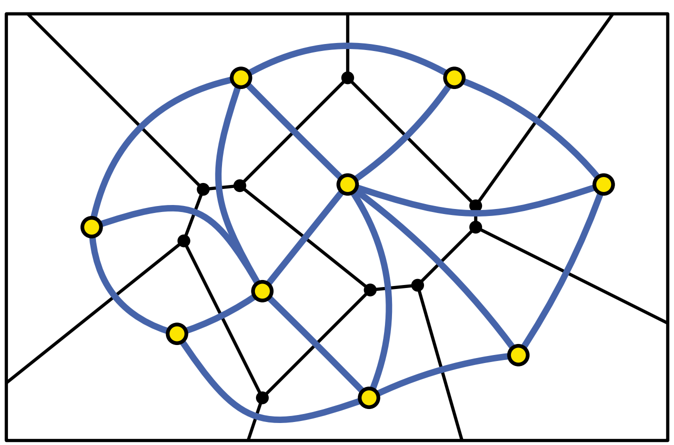
äquivalent

Für lokal optimale Triangulierungen folgt



- für jedes Dreieck ist der Umkreis-Mittelpunkt ein Voronoi-Knoten
- die Kanten des Dreiecks entsprechen den Voronoi-Kanten inzident zum Voronoi-Knoten

$\Rightarrow$ wir erhalten den Dualgraph des Voronoi-Diagramms



Umgekehrt gilt für den Dualgraph

- jede Facette ist ein Dreieck
  (Annahme: keine vier Knoten auf dem gleichen Kreis)
- Umkreis jeder Facette enthält keinen Knoten

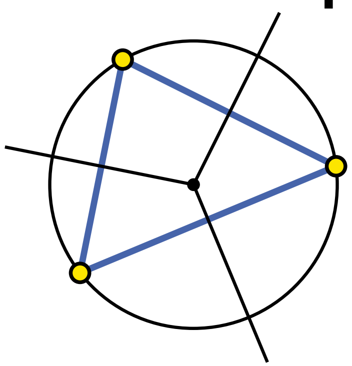
Lokal maximale Triangulierung

Bisher gesehen

- es gibt keine verbotene Kante
- die Triangulierung ist lokal maximal
- der Umkreis jedes Dreiecks enthält keinen Knoten

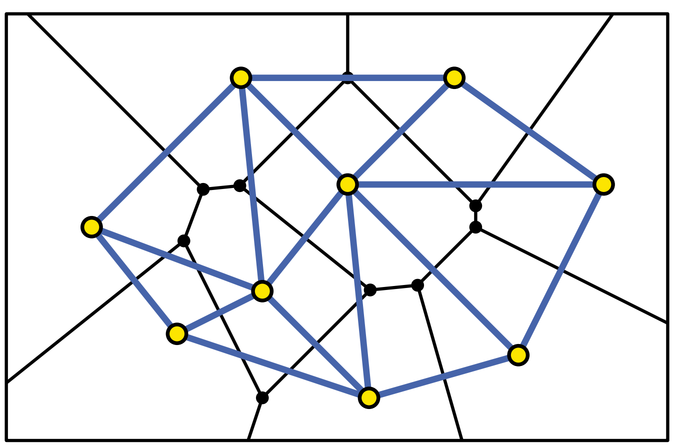
äquivalent

Für lokal optimale Triangulierungen folgt



- für jedes Dreieck ist der Umkreis-Mittelpunkt ein Voronoi-Knoten
- die Kanten des Dreiecks entsprechen den Voronoi-Kanten inzident zum Voronoi-Knoten

$\Rightarrow$ wir erhalten den Dualgraph des Voronoi-Diagramms



Umgekehrt gilt für den Dualgraph

- jede Facette ist ein Dreieck
  (Annahme: keine vier Knoten auf dem gleichen Kreis)
- Umkreis jeder Facette enthält keinen Knoten

Müssen wir nicht noch zeigen, dass es keine Kantenkreuzungen gibt?

Delaunay-Triangulierung

Der Dualgraph des Voronoi-Diagramms heißt **Delaunay-Triangulierung**.

Delaunay-Triangulierung

Der Dualgraph des Voronoi-Diagramms heißt **Delaunay-Triangulierung**.

Gerade gesehen

- die Delaunay-Triangulierung ist lokal maximal
- wenn $\mathcal{T}$ lokal maximal ist, dann ist $\mathcal{T}$ die Delaunay-Triangulierung

Delaunay-Triangulierung

Der Dualgraph des Voronoi-Diagramms heißt **Delaunay-Triangulierung**.

Gerade gesehen

- die Delaunay-Triangulierung ist lokal maximal
- wenn $\mathcal{T}$ lokal maximal ist, dann ist $\mathcal{T}$ die Delaunay-Triangulierung

Daraus folgt

- die lokal maximale Triangulierung ist eindeutig (nämlich die Delaunay-Traing.)

Delaunay-Triangulierung

Der Dualgraph des Voronoi-Diagramms heißt **Delaunay-Triangulierung**.

Gerade gesehen

- die Delaunay-Triangulierung ist lokal maximal
- wenn $\mathcal{T}$ lokal maximal ist, dann ist $\mathcal{T}$ die Delaunay-Triangulierung

Daraus folgt

- die lokal maximale Triangulierung ist eindeutig (nämlich die Delaunay-Traing.)
- die Delaunay-Triangulierung ist also global maximal

Delaunay-Triangulierung

Der Dualgraph des Voronoi-Diagramms heißt **Delaunay-Triangulierung**.

Gerade gesehen

- die Delaunay-Triangulierung ist lokal maximal
- wenn $\mathcal{T}$ lokal maximal ist, dann ist $\mathcal{T}$ die Delaunay-Triangulierung

Daraus folgt

- die lokal maximale Triangulierung ist eindeutig (nämlich die Delaunay-Traing.)
- die Delaunay-Triangulierung ist also global maximal
- sie kann in $O(n \log n)$ berechnet werden (Beach-Line Algo)

Delaunay-Triangulierung

Der Dualgraph des Voronoi-Diagramms heißt **Delaunay-Triangulierung**.

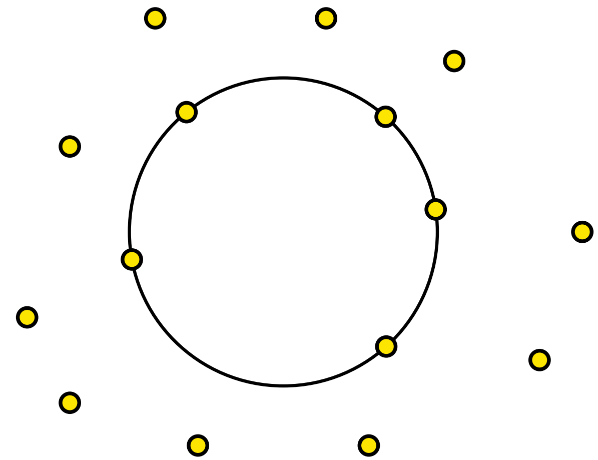
Gerade gesehen

- die Delaunay-Triangulierung ist lokal maximal
- wenn $\mathcal{T}$ lokal maximal ist, dann ist $\mathcal{T}$ die Delaunay-Triangulierung

Daraus folgt

- die lokal maximale Triangulierung ist eindeutig (nämlich die Delaunay-Traing.)
- die Delaunay-Triangulierung ist also global maximal
- sie kann in $O(n \log n)$ berechnet werden (Beach-Line Algo)

Mehrere Punkte auf einem Kreis



Delaunay-Triangulierung

Der Dualgraph des Voronoi-Diagramms heißt **Delaunay-Triangulierung**.

Gerade gesehen

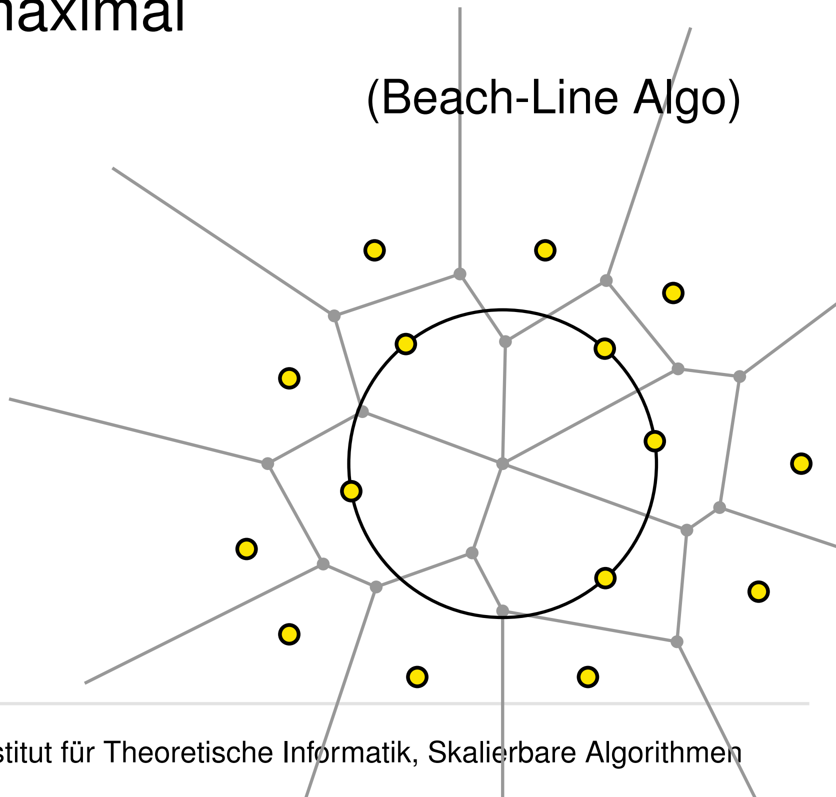
- die Delaunay-Triangulierung ist lokal maximal
- wenn $\mathcal{T}$ lokal maximal ist, dann ist $\mathcal{T}$ die Delaunay-Triangulierung

Daraus folgt

- die lokal maximale Triangulierung ist eindeutig (nämlich die Delaunay-Traing.)
- die Delaunay-Triangulierung ist also global maximal
- sie kann in $O(n \log n)$ berechnet werden (Beach-Line Algo)

Mehrere Punkte auf einem Kreis

- Voronoi-Knoten hat höheren Grad



Delaunay-Triangulierung

Der Dualgraph des Voronoi-Diagramms heißt **Delaunay-Triangulierung**.

Gerade gesehen

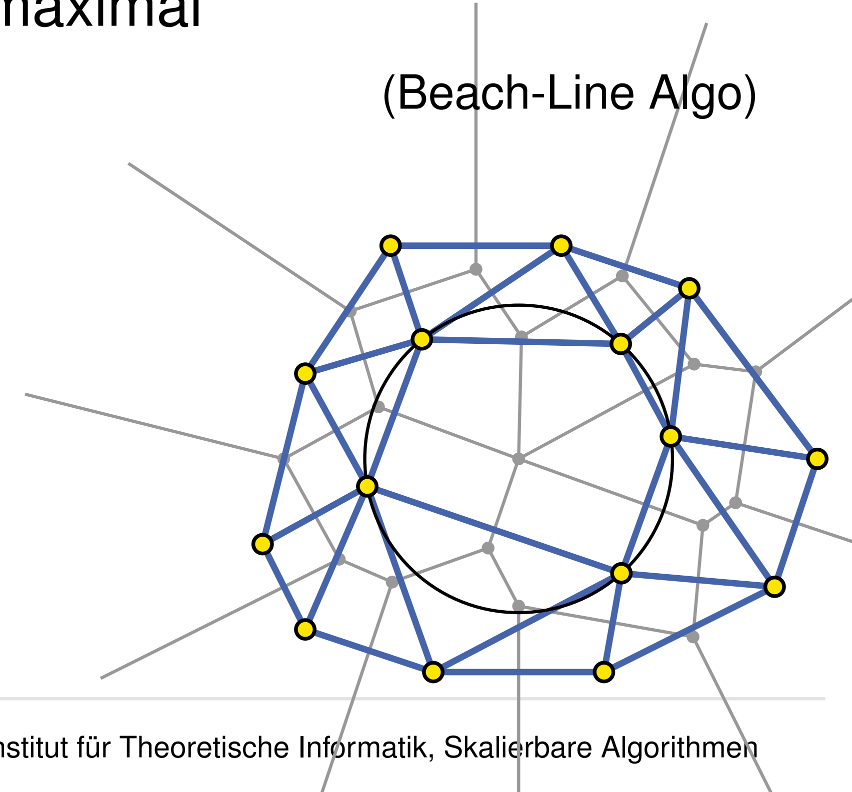
- die Delaunay-Triangulierung ist lokal maximal
- wenn $\mathcal{T}$ lokal maximal ist, dann ist $\mathcal{T}$ die Delaunay-Triangulierung

Daraus folgt

- die lokal maximale Triangulierung ist eindeutig (nämlich die Delaunay-Traing.)
- die Delaunay-Triangulierung ist also global maximal
- sie kann in $O(n \log n)$ berechnet werden (Beach-Line Algo)

Mehrere Punkte auf einem Kreis

- Voronoi-Knoten hat höheren Grad
- Dualgraph ist keine Triangulierung



Delaunay-Triangulierung

Der Dualgraph des Voronoi-Diagramms heißt **Delaunay-Triangulierung**.

Gerade gesehen

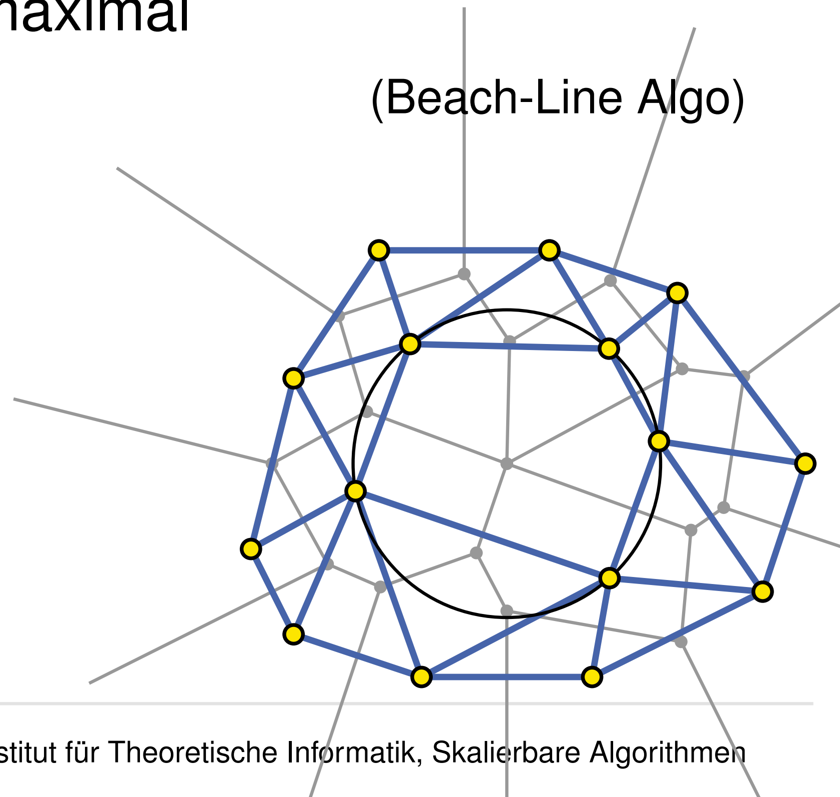
- die Delaunay-Triangulierung ist lokal maximal
- wenn $\mathcal{T}$ lokal maximal ist, dann ist $\mathcal{T}$ die Delaunay-Triangulierung

Daraus folgt

- die lokal maximale Triangulierung ist eindeutig (nämlich die Delaunay-Traing.)
- die Delaunay-Triangulierung ist also global maximal
- sie kann in $O(n \log n)$ berechnet werden (Beach-Line Algo)

Mehrere Punkte auf einem Kreis

- Voronoi-Knoten hat höheren Grad
- Dualgraph ist keine Triangulierung
- es gibt mehrere Delaunay-Triangulierungen



Delaunay-Triangulierung

Der Dualgraph des Voronoi-Diagramms heißt **Delaunay-Triangulierung**.

Gerade gesehen

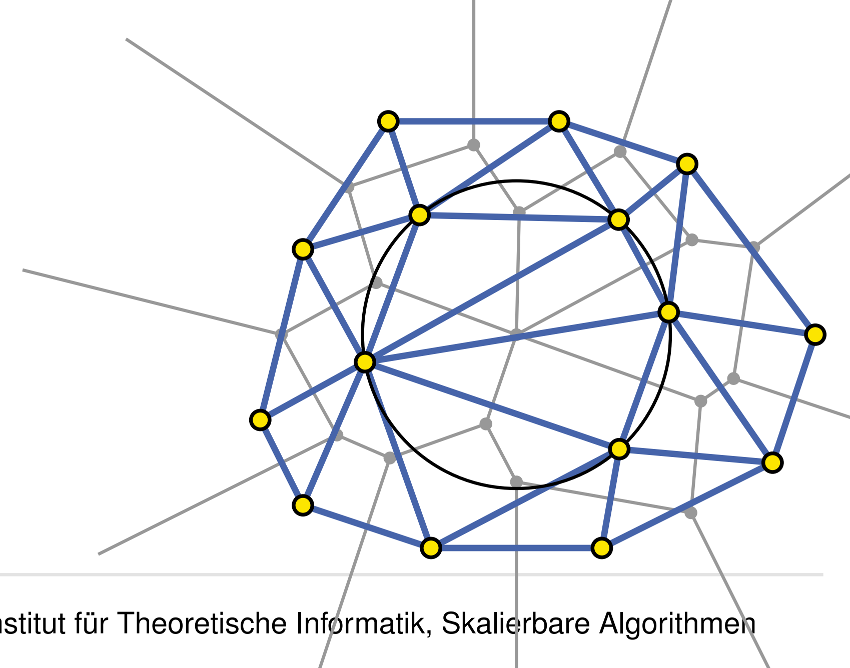
- die Delaunay-Triangulierung ist lokal maximal
- wenn $\mathcal{T}$ lokal maximal ist, dann ist $\mathcal{T}$ die Delaunay-Triangulierung

Daraus folgt

- die lokal maximale Triangulierung ist eindeutig (nämlich die Delaunay-Traing.)
- die Delaunay-Triangulierung ist also global maximal
- sie kann in $O(n \log n)$ berechnet werden (Beach-Line Algo)

Mehrere Punkte auf einem Kreis

- Voronoi-Knoten hat höheren Grad
- Dualgraph ist keine Triangulierung
- es gibt mehrere Delaunay-Triangulierungen



Delaunay-Triangulierung

Der Dualgraph des Voronoi-Diagramms heißt **Delaunay-Triangulierung**.

Gerade gesehen

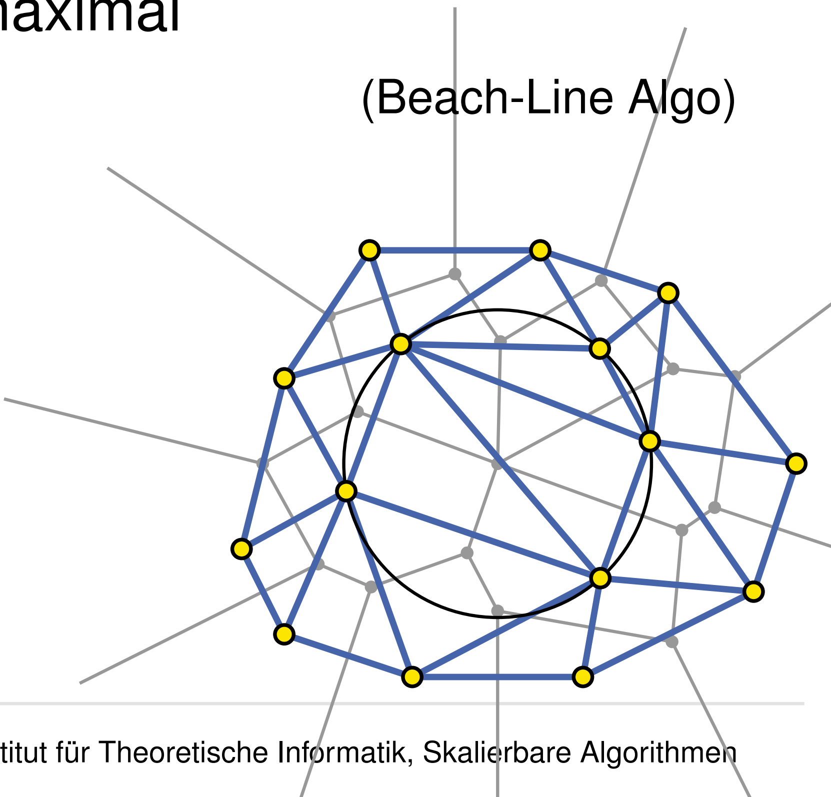
- die Delaunay-Triangulierung ist lokal maximal
- wenn $\mathcal{T}$ lokal maximal ist, dann ist $\mathcal{T}$ die Delaunay-Triangulierung

Daraus folgt

- die lokal maximale Triangulierung ist eindeutig (nämlich die Delaunay-Traing.)
- die Delaunay-Triangulierung ist also global maximal
- sie kann in $O(n \log n)$ berechnet werden (Beach-Line Algo)

Mehrere Punkte auf einem Kreis

- Voronoi-Knoten hat höheren Grad
- Dualgraph ist keine Triangulierung
- es gibt mehrere Delaunay-Triangulierungen



Delaunay-Triangulierung

Der Dualgraph des Voronoi-Diagramms heißt **Delaunay-Triangulierung**.

Gerade gesehen

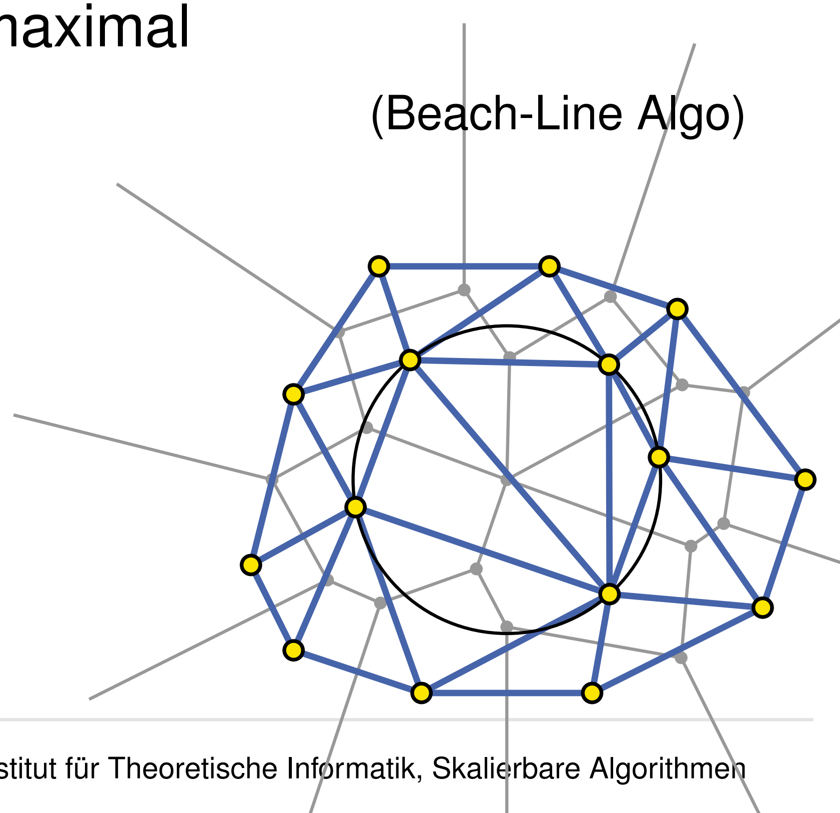
- die Delaunay-Triangulierung ist lokal maximal
- wenn $\mathcal{T}$ lokal maximal ist, dann ist $\mathcal{T}$ die Delaunay-Triangulierung

Daraus folgt

- die lokal maximale Triangulierung ist eindeutig (nämlich die Delaunay-Traing.)
- die Delaunay-Triangulierung ist also global maximal
- sie kann in $O(n \log n)$ berechnet werden (Beach-Line Algo)

Mehrere Punkte auf einem Kreis

- Voronoi-Knoten hat höheren Grad
- Dualgraph ist keine Triangulierung
- es gibt mehrere Delaunay-Triangulierungen



Delaunay-Triangulierung

Der Dualgraph des Voronoi-Diagramms heißt **Delaunay-Triangulierung**.

Gerade gesehen

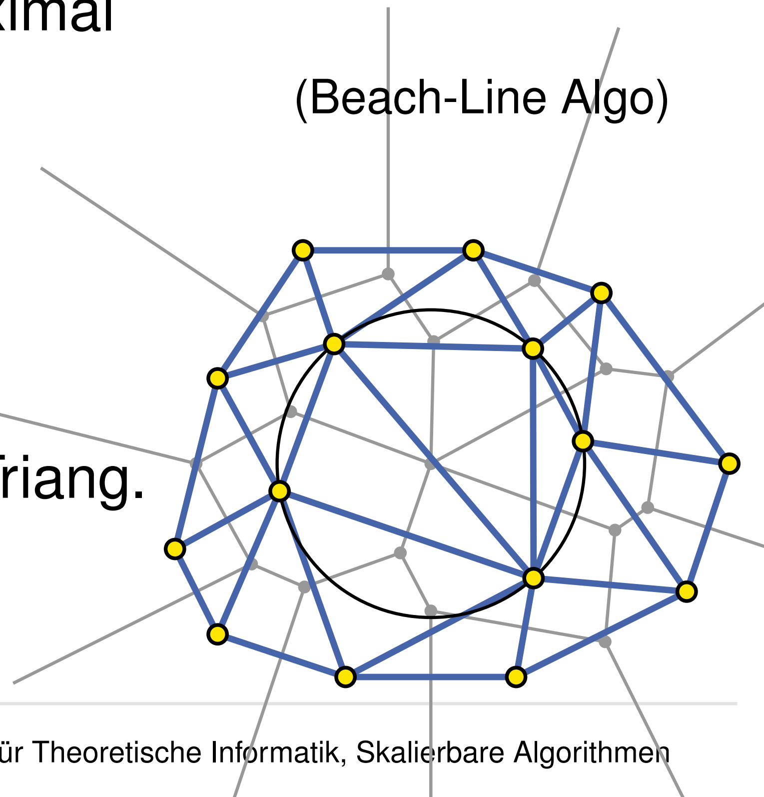
- die Delaunay-Triangulierung ist lokal maximal
- wenn $\mathcal{T}$ lokal maximal ist, dann ist $\mathcal{T}$ die Delaunay-Triangulierung

Daraus folgt

- die lokal maximale Triangulierung ist eindeutig (nämlich die Delaunay-Traing.)
- die Delaunay-Triangulierung ist also global maximal
- sie kann in $O(n \log n)$ berechnet werden (Beach-Line Algo)

Mehrere Punkte auf einem Kreis

- Voronoi-Knoten hat höheren Grad
- Dualgraph ist keine Triangulierung
- es gibt mehrere Delaunay-Triangulierungen
- jede lokal maximale Triang. ist eine Delaunay-Triang.
- nicht alle sind global maximal



Delaunay-Triangulierung

Der Dualgraph des Voronoi-Diagramms heißt **Delaunay-Triangulierung**.

Gerade gesehen

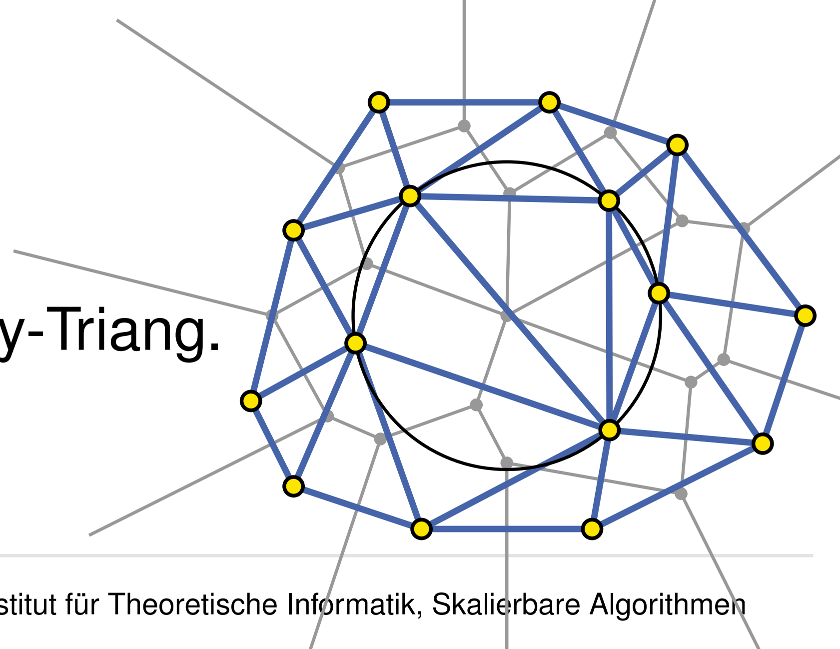
- die Delaunay-Triangulierung ist lokal maximal
- wenn $\mathcal{T}$ lokal maximal ist, dann ist $\mathcal{T}$ die Delaunay-Triangulierung

Daraus folgt

- die lokal maximale Triangulierung ist eindeutig (nämlich die Delaunay-Traing.)
- die Delaunay-Triangulierung ist also global maximal
- sie kann in $O(n \log n)$ berechnet werden (Beach-Line Algo)

Mehrere Punkte auf einem Kreis

- Voronoi-Knoten hat höheren Grad
- Dualgraph ist keine Triangulierung
- es gibt mehrere Delaunay-Triangulierungen
- jede lokal maximale Triang. ist eine Delaunay-Triang.
- nicht alle sind global maximal
- mehr dazu in der Übung



Zusammenfassung

Heute gesehen

- die Delaunay-Triangulierung hat schöne Eigenschaften
  - lexikographisch maximaler Winkelvektor
  - Dualgraph zum Voronoi-Diagramm

Zusammenfassung

Heute gesehen

- die Delaunay-Triangulierung hat schöne Eigenschaften
  - lexikographisch maximaler Winkelvektor
  - Dualgraph zum Voronoi-Diagramm
- Beweistechnik: lokales Optimum eindeutig $\Rightarrow$ muss globales Optimum sein

Zusammenfassung

Heute gesehen

- die Delaunay-Triangulierung hat schöne Eigenschaften
  - lexikographisch maximaler Winkelvektor
  - Dualgraph zum Voronoi-Diagramm
- Beweistechnik: lokales Optimum eindeutig $\Rightarrow$ muss globales Optimum sein

Was gibt es sonst noch?

- die Delaunay-Triangulierung hat weitere schöne Eigenschaften (Beispiel: MST ist Teil der Triangulierung)

Zusammenfassung

Heute gesehen

- die Delaunay-Triangulierung hat schöne Eigenschaften
  - lexikographisch maximaler Winkelvektor
  - Dualgraph zum Voronoi-Diagramm
- Beweistechnik: lokales Optimum eindeutig $\Rightarrow$ muss globales Optimum sein

Was gibt es sonst noch?

- die Delaunay-Triangulierung hat weitere schöne Eigenschaften (Beispiel: MST ist Teil der Triangulierung)
- weitere Optimierungskriterien für Triangulierungen: Minimierung der Gesamtkantenlänge ist beispielsweise NP-schwer

Zusammenfassung

Karlsruher Institut für Technologie

Heute gesehen

- die Delaunay-Triangulierung hat schöne Eigenschaften
  - lexikographisch maximaler Winkelvektor
  - Dualgraph zum Voronoi-Diagramm
- Beweistechnik: lokales Optimum eindeutig $\Rightarrow$ muss globales Optimum sein

Was gibt es sonst noch?

- die Delaunay-Triangulierung hat weitere schöne Eigenschaften (Beispiel: MST ist Teil der Triangulierung)
- weitere Optimierungskriterien für Triangulierungen: Minimierung der Gesamtkantenlänge ist beispielsweise NP-schwer
- Voronoi-Diagramme und Delaunay-Triangulierungen in Ipe:

  https://github.com/otfried/ipe-wiki/wiki/QVoronoi