

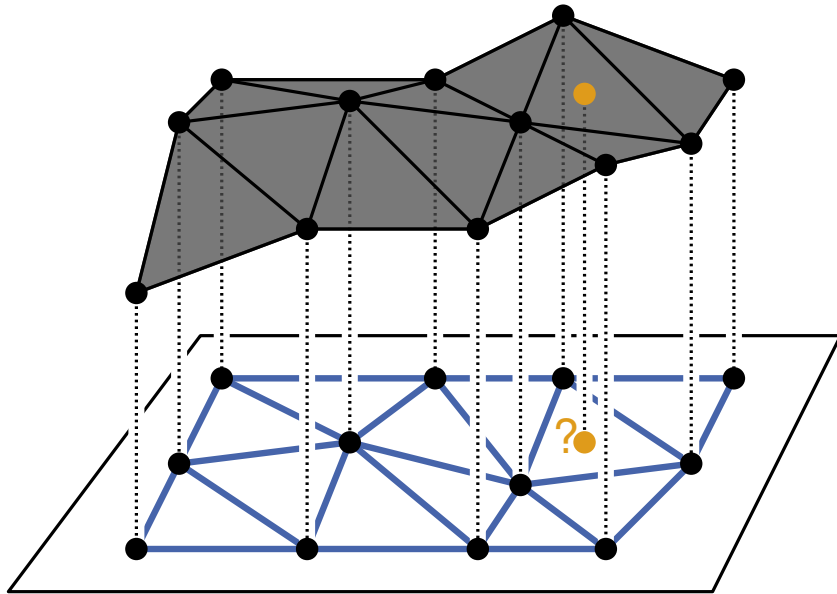
Algorithmische Geometrie

Höheninterpolation & Delaunay-Triangulierung



Höheninterpolation

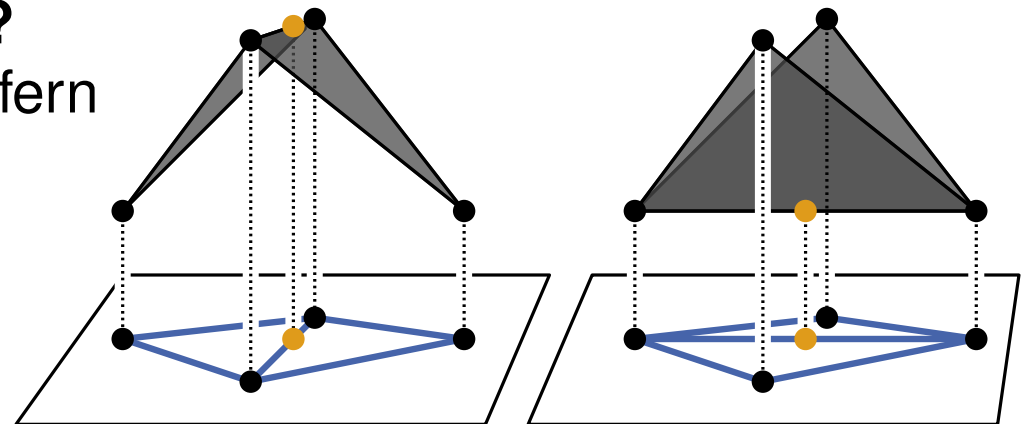
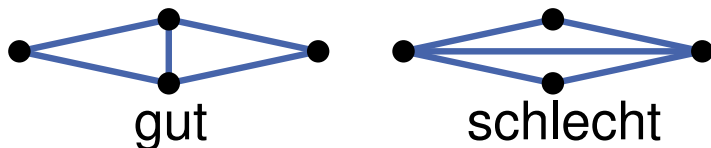
Messpunkte einer Terrain-Höhenmessung



- Wie hoch liegt ein nicht gemessener Punkt?
- trianguliere die Punkte in der Ebene
- → Triangulierung der 3D-Messpunkte
- lies Höhe des angefragten Punktes aus der Triangulierung ab

Was ist eine gute Triangulierung?

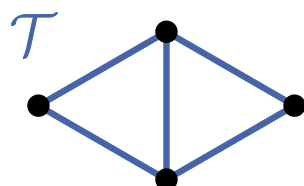
- verschiedene Triangulierungen liefern sehr unterschiedliche Ergebnisse
- Ziel: vermeide dünne Dreiecke



Gute und Schlechte Triangulierungen

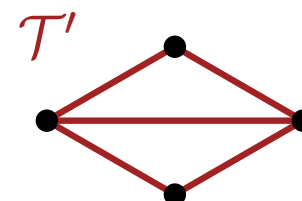
Winkel-Vektor

- betrachte Triangulierung \mathcal{T} einer Punktemenge mit m Dreiecken
- Innenwinkel der Dreiecke, aufsteigend sortiert: $\alpha_1, \dots, \alpha_{3m}$
- Winkel-Vektor: $\alpha(\mathcal{T}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_{3m})$



$$\alpha(\mathcal{T}) = (60^\circ, 60^\circ, 60^\circ, 60^\circ, 60^\circ, 60^\circ)$$

$$\alpha(\mathcal{T}') = (30^\circ, 30^\circ, 30^\circ, 30^\circ, 120^\circ, 120^\circ)$$



- wir ordnen die Winkel-Vektoren lexikographisch
- also $\alpha(\mathcal{T}) > \alpha(\mathcal{T}') \Leftrightarrow \exists i \in \{1, \dots, 3m\} : a_i > a'_i$ und $\forall j < i : a_j = a'_j$

Optimale Triangulierungen

- Triangulierung ist optimal, wenn sie maximal ist (bzgl. dieser Ordnung)
(also \mathcal{T} optimal $\Leftrightarrow \mathcal{T} \geq \mathcal{T}'$ für alle Triangulierungen \mathcal{T}')

Im Folgenden

- Woran erkennen wir eine optimale Triangulierung?
- Können wir eine optimale Triangulierung berechnen?
- Ist die optimale Triangulierung eindeutig?

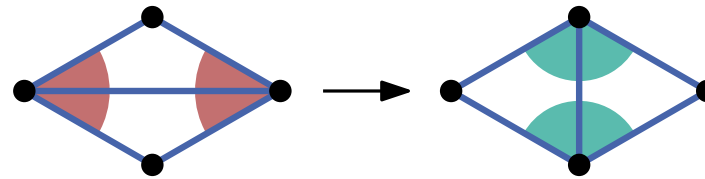
Verbotene Kanten

Idee

- verbessere Triangulierung schrittweise durch lokale Veränderungen
- dadurch erreicht man ein lokales Maximum
- Hoffnung: das ist auch ein globales Maximum

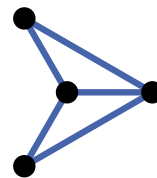
Kanten-Flip

- entferne eine (innere) Kante
- füge die andere Diagonale ein



Beobachtung

- ist nicht für jede Kante möglich
- wir interessieren uns für die vier Winkel an der geflippten Kante
- Kante ist verboten, wenn ihr Flip den minimalen dieser Winkel vergrößert
- sei e in \mathcal{T} verboten und sei $\mathcal{T}' = \text{flip}(\mathcal{T}, e)$; dann gilt $\alpha(\mathcal{T}') > \alpha(\mathcal{T})$



Finde ein lokales Maximum

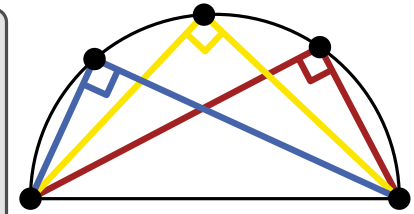
- solange es eine verbotene Kante gibt: flippe diese

Warum terminiert das?

Satz des Thales

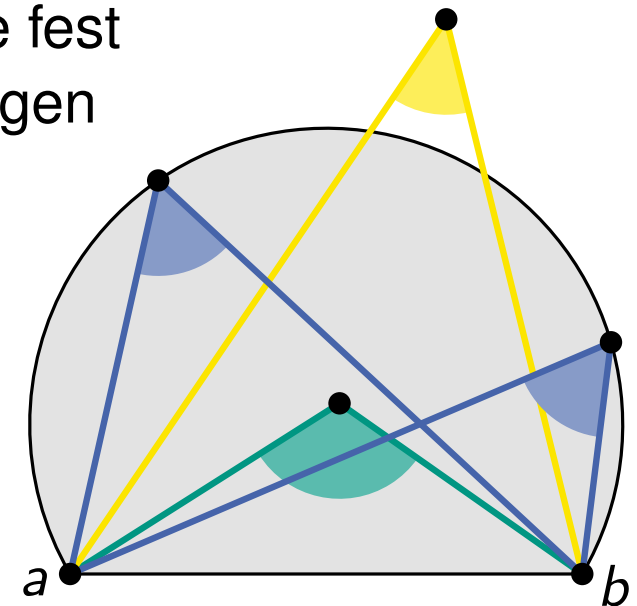
Satz des Thales

Die Strecken von einem Punkt auf einem Kreis zu den Endpunkten eines Durchmessers bilden einen rechten Winkel.



Verallgemeinerung

- halte eine beliebige Sehne eines Kreises fest (Endpunkte: a und b)
- halte außerdem eines der beiden Kreissegmente fest
- die Strecken von jedem Punkt auf dem Kreisbogen zu a und b haben denselben Winkel
- für Punkte innerhalb ist der Winkel größer
- für Punkte außerhalb ist der Winkel kleiner
(auf derselben Seite von ab)

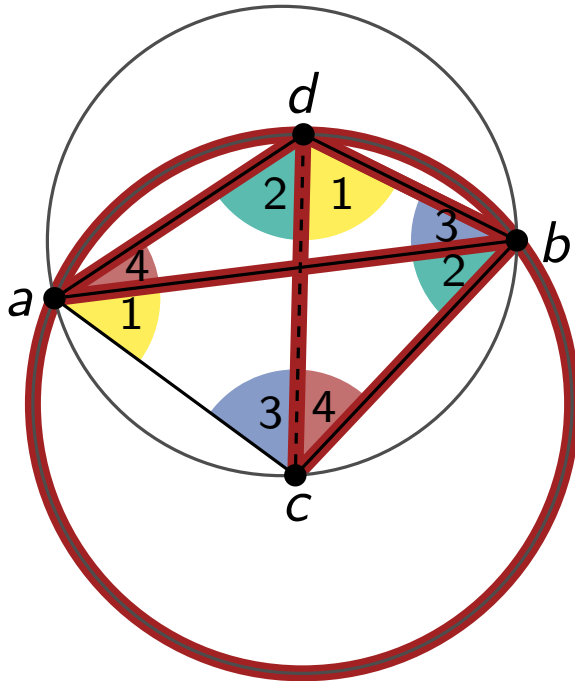


Welche Kanten sind verboten?

Lemma

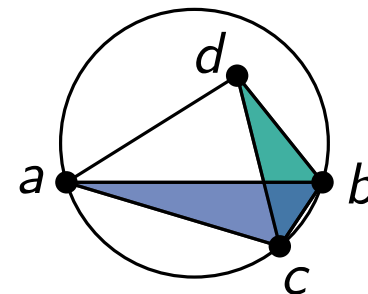
Seien $\triangle abc$ und $\triangle abd$ zwei Dreiecke, sodass a, b, c, d in konvexer Lage sind. Der Umkreis von $\triangle abc$ enthält d genau dann, wenn ab verboten ist.

Beweis



- beachte: der Umkreis um $\triangle abd$ enthält dann c
- betrachte Bijektion zwischen Winkeln bei a und b , sowie Winkeln bei c und d der geflippten Kante
- Behauptung: die Winkel bei ab sind jeweils kleiner als ihr zugehöriger Winkel bei cd
- folgt aus Satz des Thales, wenn man sich die richtigen Dreiecke anschaut
 - ⇒ minimaler Winkel an cd größer
 - ⇒ ab ist verboten

- Umkehrung folgt im Prinzip analog durch Betrachtung des minimalen Winkels



Verbotene Kanten und leere Umkreise

Lemma

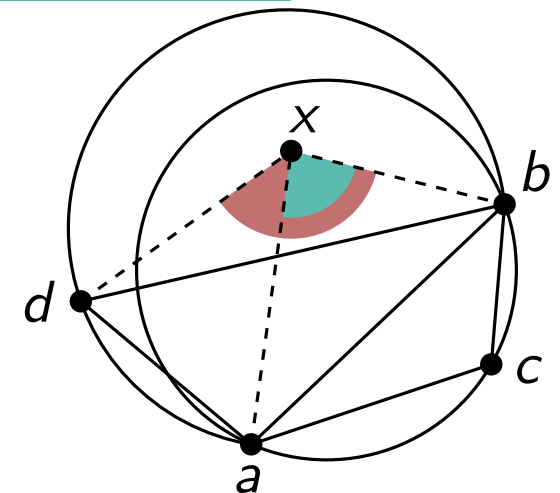
Seien $\triangle abc$ und $\triangle abd$ zwei Dreiecke, sodass a, b, c, d in konvexer Lage sind. Der Umkreis von $\triangle abc$ enthält d genau dann, wenn ab verboten ist.

Theorem

Eine Triangulierung enthält eine verbotene Kante genau dann, wenn der Umkreis eines Dreiecks einen Knoten enthält.

Beweis

- „ \Rightarrow “: folgt aus dem Lemma
- „ \Leftarrow “: Annahme: keine verbotene Kante, aber Umkreis von $\triangle abc$ enthält x
- wähle $(\triangle abc, x)$ mit dieser Eigenschaft, sodass $\angle axb$ maximal
- betrachte anders Dreieck an $\triangle abd$ an ab
- Umkreis von $\triangle abd$ enthält ebenfalls x
- $\angle dxb$ ist größer als $\angle axb$ \rightarrow Widerspruch

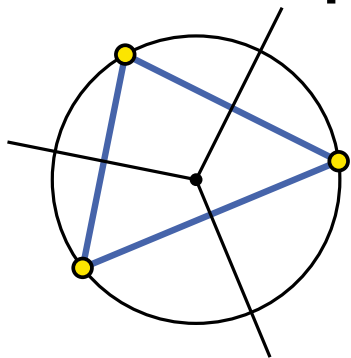


Lokal maximale Triangulierung

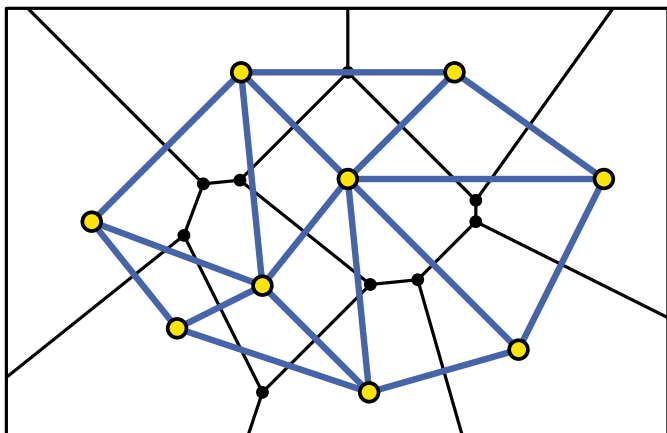
Bisher gesehen

- es gibt keine verbotene Kante
 - die Triangulierung ist lokal maximal
 - der Umkreis jedes Dreiecks enthält keinen Knoten
- } äquivalent

Für lokal optimale Triangulierungen folgt



- für jedes Dreieck ist der Umkreis-Mittelpunkt ein Voronoi-Knoten
 - die Kanten des Dreiecks entsprechen den Voronoi-Kanten inzident zum Voronoi-Knoten
- ⇒ wir erhalten den Dualgraph des Voronoi-Diagramms



Umgekehrt gilt für den Dualgraph

- jede Facette ist ein Dreieck
(Annahme: keine vier Knoten auf dem gleichen Kreis)
- Umkreis jeder Facette enthält keinen Knoten

Müssen wir nicht noch zeigen, dass es keine Kantenkreuzungen gibt?

Delaunay-Triangulierung

Der Dualgraph des Voronoi-Diagramms heißt **Delaunay-Triangulierung**.

Gerade gesehen

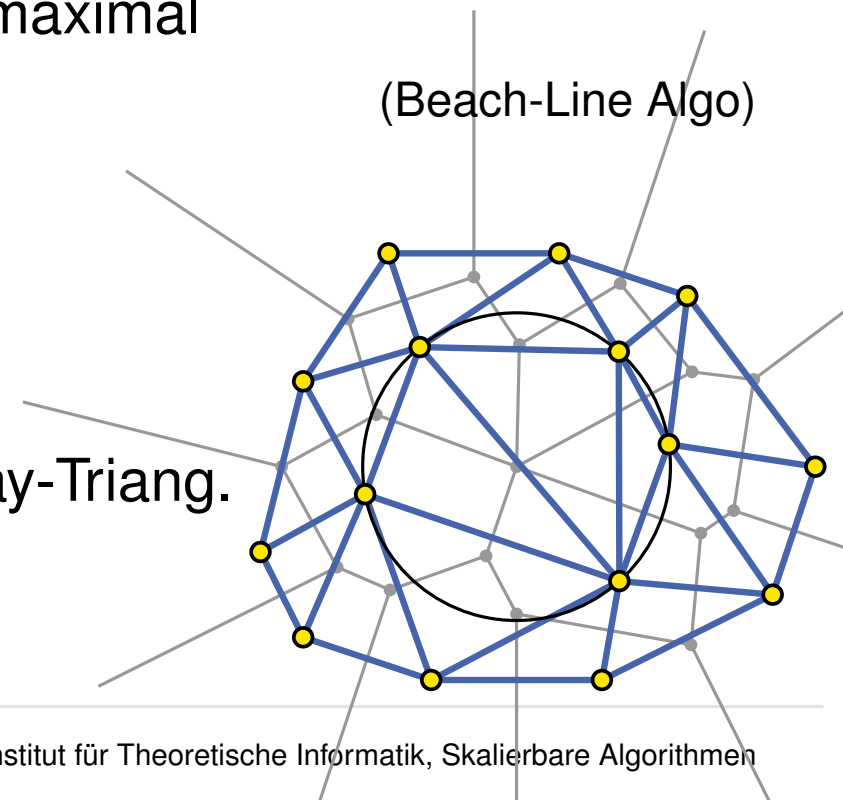
- die Delaunay-Triangulierung ist lokal maximal
- wenn \mathcal{T} lokal maximal ist, dann ist \mathcal{T} die Delaunay-Triangulierung

Daraus folgt

- die lokal maximale Triangulierung ist eindeutig (nämlich die Delaunay-Triang.)
- die Delaunay-Triangulierung ist also global maximal
- sie kann in $O(n \log n)$ berechnet werden

Mehrere Punkte auf einem Kreis

- Voronoi-Knoten hat höheren Grad
- Dualgraph ist keine Triangulierung
- es gibt mehrere Delaunay-Triangulierungen
- jede lokal maximale Triang. ist eine Delaunay-Triang.
- nicht alle sind global maximal
- mehr dazu in der Übung



Zusammenfassung

Heute gesehen

- die Delaunay-Triangulierung hat schöne Eigenschaften
 - lexikographisch maximaler Winkelvektor
 - Dualgraph zum Voronoi-Diagramm
- Beweistechnik: lokales Optimum eindeutig \Rightarrow muss globales Optimum sein

Was gibt es sonst noch?

- die Delaunay-Triangulierung hat weitere schöne Eigenschaften (Beispiel: MST ist Teil der Triangulierung)
- weitere Optimierungskriterien für Triangulierungen: Minimierung der Gesamtkantenlänge ist beispielsweise NP-schwer
- Voronoi-Diagramme und Delaunay-Triangulierungen in Ipe:
<https://github.com/otfried/ipe-wiki/wiki/QVoronoi>