Karlsruher Institut für Technologie

Algorithmische Geometrie

Orthogonale Bereichsanfragen – Fractional Cascading

Suche in vielen Arrays

Situation

- betrachte ℓ sortierte Arrays $A_1, \ldots, A_k$ mit jeweils $\leq n$ Elementen
- finde die Position von einem x in allen Arrays
- Offensichtliche Lösung: $O(\ell \log n)$

$A_1 = $

2	5	8	12	17	19	25	28

$A_2 = $

3	4	6	11	13	18	25	33

$A_3 = $

1	3	7	9	17	19	22	32

Suche in vielen Arrays

Situation

- betrachte ℓ sortierte Arrays $A_1, \dots, A_k$ mit jeweils $\leq n$ Elementen
- finde die Position von einem x in allen Arrays
- Offensichtliche Lösung: $O(\ell \log n)$
- letzte Woche: $O(\ell + \log n)$ falls $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_\ell$

$$A_1 = \boxed{2}\boxed{5}\boxed{8}\boxed{12}\boxed{17}\boxed{19}\boxed{25}\boxed{28}$$

$$A_2 = \boxed{3}\boxed{4}\boxed{6}\boxed{11}\boxed{13}\boxed{18}\boxed{25}\boxed{33}$$

$$A_3 = \boxed{1}\boxed{3}\boxed{7}\boxed{9}\boxed{17}\boxed{19}\boxed{22}\boxed{32}$$

Suche in vielen Arrays

Situation

- betrachte ℓ sortierte Arrays $A_1, \dots, A_k$ mit jeweils $\leq n$ Elementen
- finde die Position von einem x in allen Arrays
- Offensichtliche Lösung: $O(\ell \log n)$
- letzte Woche: $O(\ell + \log n)$ falls $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_\ell$

Geht $\ell + \log n$ auch im Allgemeinen?

$A_1 =$

2	5	8	12	17	19	25	28

$A_2 =$

3	4	6	11	13	18	25	33

$A_3 =$

1	3	7	9	17	19	22	32

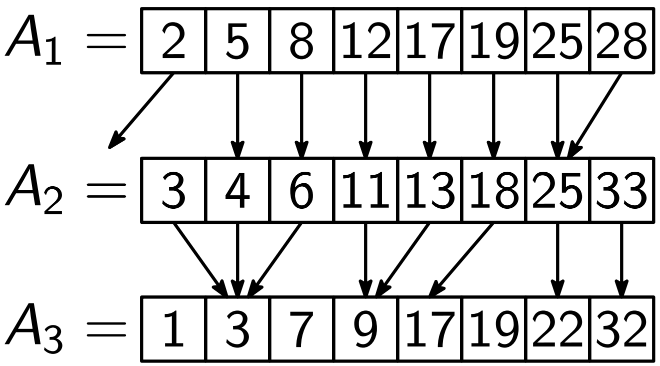
Suche in vielen Arrays

Situation

- betrachte ℓ sortierte Arrays $A_1, \ldots, A_k$ mit jeweils $\leq n$ Elementen
- finde die Position von einem x in allen Arrays
- Offensichtliche Lösung: $O(\ell \log n)$
- letzte Woche: $O(\ell + \log n)$ falls $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_\ell$

Geht $\boldsymbol{\ell + \log n}$ auch im Allgemeinen?

- Idee: wie letzte Woche
  - suche x in A_1
  - finde x in $A_2, \ldots, A_\ell$ mittels Zeiger



Suche in vielen Arrays

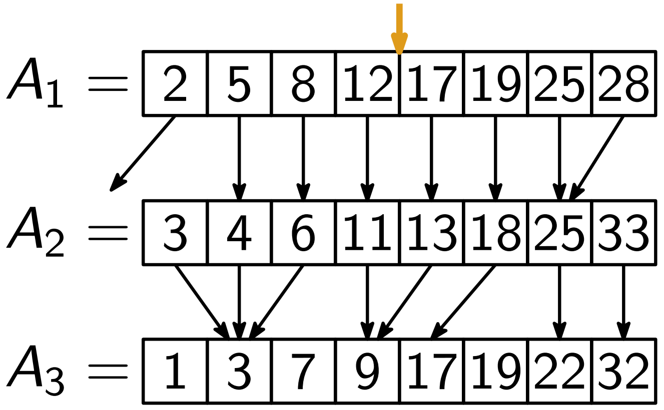
Situation

- betrachte ℓ sortierte Arrays $A_1, \ldots, A_k$ mit jeweils $\leq n$ Elementen
- finde die Position von einem x in allen Arrays
- Offensichtliche Lösung: $O(\ell \log n)$
- letzte Woche: $O(\ell + \log n)$ falls $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_\ell$

Geht $\ell + \log n$ auch im Allgemeinen?

- Idee: wie letzte Woche
  - suche x in A_1
  - finde x in $A_2, \ldots, A_\ell$ mittels Zeiger

Beispielanfrage: $x = 14$



Suche in vielen Arrays

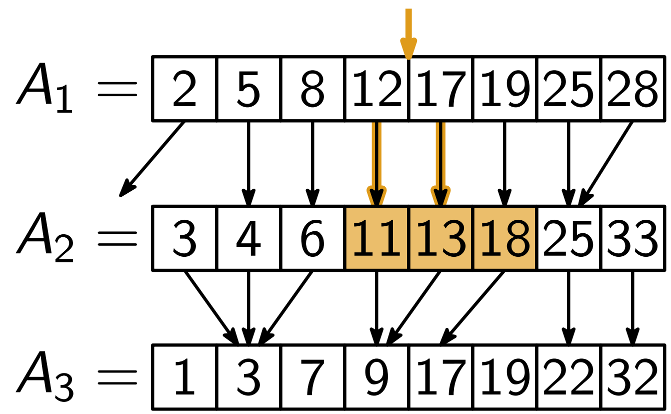
Situation

- betrachte ℓ sortierte Arrays $A_1, \ldots, A_k$ mit jeweils $\leq n$ Elementen
- finde die Position von einem x in allen Arrays
- Offensichtliche Lösung: $O(\ell \log n)$
- letzte Woche: $O(\ell + \log n)$ falls $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_\ell$

Geht $\ell + \log n$ auch im Allgemeinen?

- Idee: wie letzte Woche
  - suche x in A_1
  - finde x in $A_2, \ldots, A_\ell$ mittels Zeiger

Beispielanfrage: $x = 14$



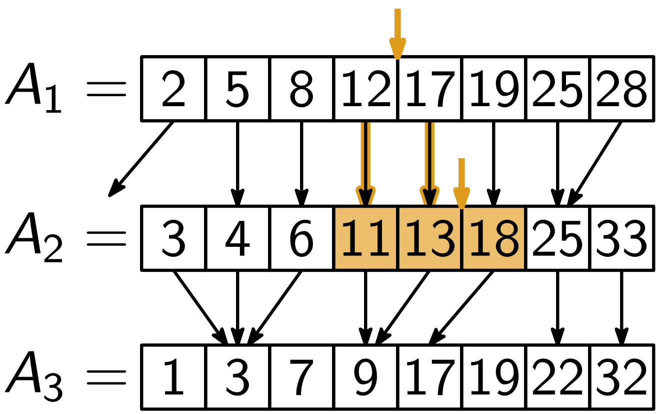
Suche in vielen Arrays

Karlsruher Institut für Technologie

Situation

- betrachte ℓ sortierte Arrays $A_1, \dots, A_k$ mit jeweils $\leq n$ Elementen
- finde die Position von einem x in allen Arrays
- Offensichtliche Lösung: $O(\ell \log n)$
- letzte Woche: $O(\ell + \log n)$ falls $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_\ell$

Beispielanfrage: $x = 14$



Geht $\ell + \log n$ auch im Allgemeinen?

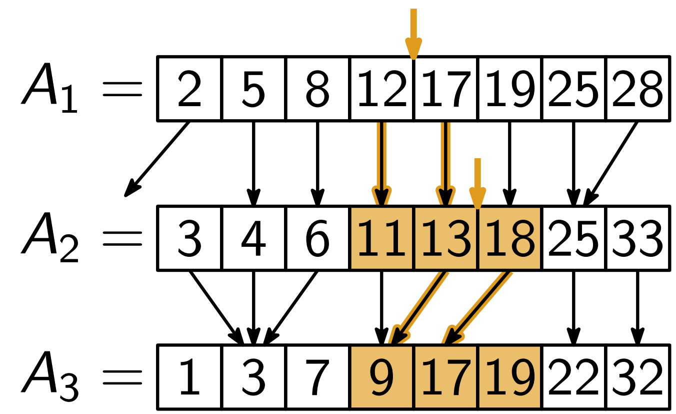
- Idee: wie letzte Woche
  - suche x in A_1
  - finde x in $A_2, \dots, A_\ell$ mittels Zeiger

Suche in vielen Arrays

Situation

- betrachte ℓ sortierte Arrays $A_1, \ldots, A_k$ mit jeweils $\leq n$ Elementen
- finde die Position von einem x in allen Arrays
- Offensichtliche Lösung: $O(\ell \log n)$
- letzte Woche: $O(\ell + \log n)$ falls $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_\ell$

Beispielanfrage: $x = 14$



Geht $\ell + \log n$ auch im Allgemeinen?

- Idee: wie letzte Woche
  - suche x in A_1
  - finde x in $A_2, \ldots, A_\ell$ mittels Zeiger

Suche in vielen Arrays

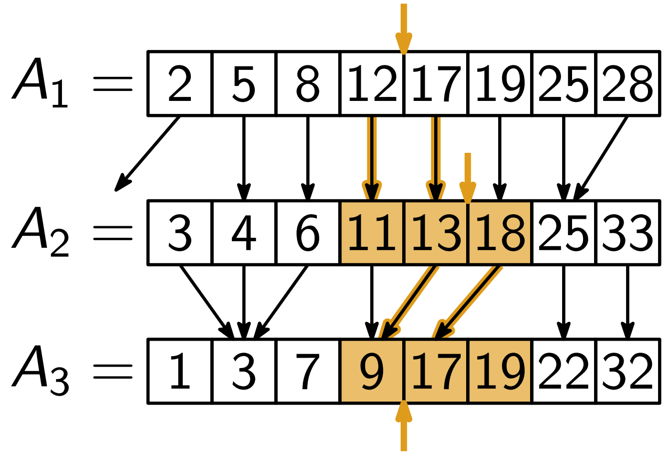
Situation

- betrachte ℓ sortierte Arrays $A_1, \dots, A_k$ mit jeweils $\leq n$ Elementen
- finde die Position von einem x in allen Arrays
- Offensichtliche Lösung: $O(\ell \log n)$
- letzte Woche: $O(\ell + \log n)$ falls $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_\ell$

Geht $\ell + \log n$ auch im Allgemeinen?

- Idee: wie letzte Woche
  - suche x in A_1
  - finde x in $A_2, \dots, A_\ell$ mittels Zeiger

Beispielanfrage: $x = 14$



Suche in vielen Arrays

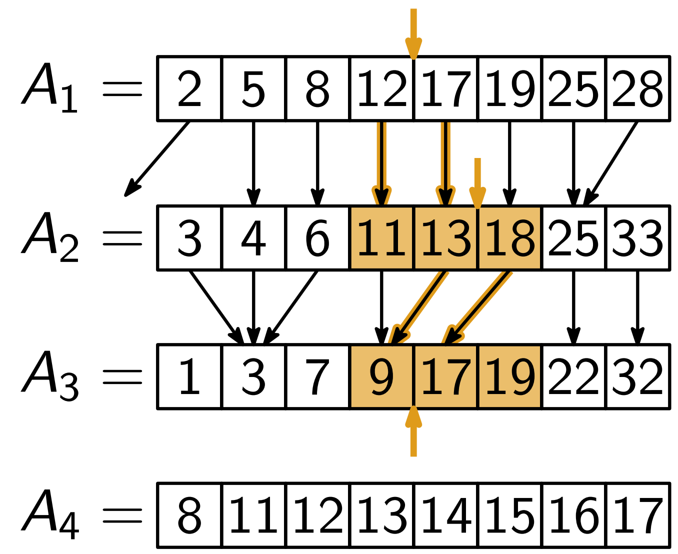
Situation

- betrachte ℓ sortierte Arrays $A_1, \dots, A_k$ mit jeweils $\leq n$ Elementen
- finde die Position von einem x in allen Arrays
- Offensichtliche Lösung: $O(\ell \log n)$
- letzte Woche: $O(\ell + \log n)$ falls $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_\ell$

Geht $\ell + \log n$ auch im Allgemeinen?

- Idee: wie letzte Woche
  - suche x in A_1
  - finde x in $A_2, \dots, A_\ell$ mittels Zeiger

Beispielanfrage: $x = 14$



Suche in vielen Arrays

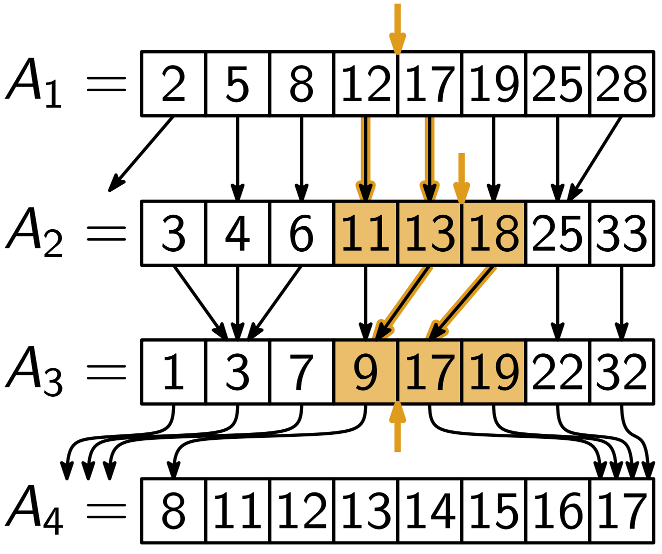
Situation

- betrachte ℓ sortierte Arrays $A_1, \dots, A_k$ mit jeweils $\leq n$ Elementen
- finde die Position von einem x in allen Arrays
- Offensichtliche Lösung: $O(\ell \log n)$
- letzte Woche: $O(\ell + \log n)$ falls $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_\ell$

Geht $\ell + \log n$ auch im Allgemeinen?

- Idee: wie letzte Woche
  - suche x in A_1
  - finde x in $A_2, \dots, A_\ell$ mittels Zeiger

Beispielanfrage: $x = 14$



Suche in vielen Arrays

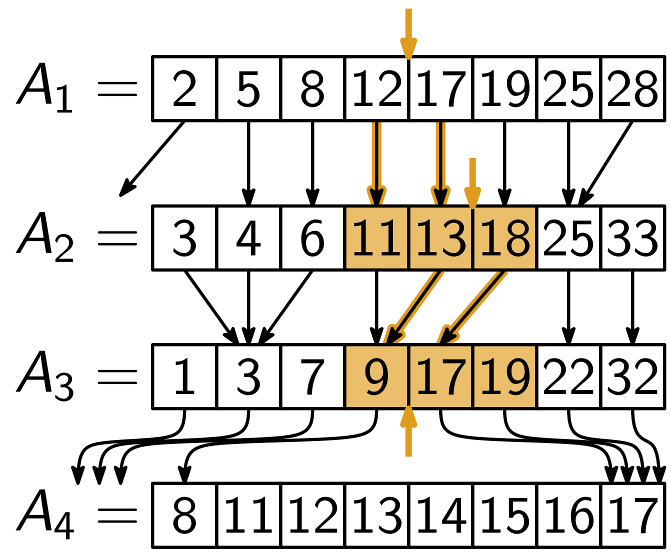
Situation

- betrachte ℓ sortierte Arrays $A_1, \ldots, A_k$ mit jeweils $\leq n$ Elementen
- finde die Position von einem x in allen Arrays
- Offensichtliche Lösung: $O(\ell \log n)$
- letzte Woche: $O(\ell + \log n)$ falls $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_\ell$

Geht $\ell + \log n$ auch im Allgemeinen?

- Idee: wie letzte Woche
  - suche x in A_1
  - finde x in $A_2, \ldots, A_\ell$ mittels Zeiger
- Problem: Position von x in A_i lässt ggf. keine Rückschlüsse auf Position in A_{i+1} zu

Beispielanfrage: $x = 14$



Suche in vielen Arrays

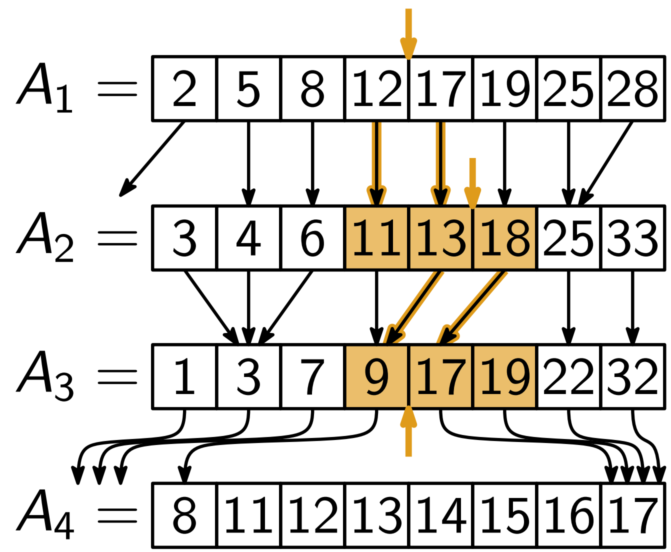
Situation

- betrachte ℓ sortierte Arrays $A_1, \dots, A_k$ mit jeweils $\leq n$ Elementen
- finde die Position von einem x in allen Arrays
- Offensichtliche Lösung: $O(\ell \log n)$
- letzte Woche: $O(\ell + \log n)$ falls $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_\ell$

Geht $\ell + \log n$ auch im Allgemeinen?

- Idee: wie letzte Woche
  - suche x in A_1
  - finde x in $A_2, \dots, A_\ell$ mittels Zeiger
- Problem: Position von x in A_i lässt ggf. keine Rückschlüsse auf Position in A_{i+1} zu

Beispielanfrage: $x = 14$



Beobachtung

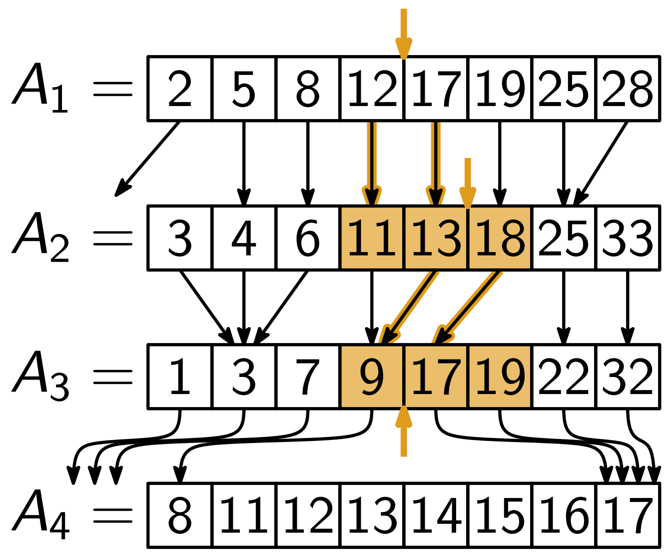
- $A_i \supseteq A_{i+1} \Rightarrow$ Position in A_{i+1} kann aus Position in A_i abgelesen werden

Suche in vielen Arrays

Situation

- betrachte ℓ sortierte Arrays $A_1, \dots, A_k$ mit jeweils $\leq n$ Elementen
- finde die Position von einem x in allen Arrays
- Offensichtliche Lösung: $O(\ell \log n)$
- letzte Woche: $O(\ell + \log n)$ falls $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_\ell$

Beispielanfrage: $x = 14$



Geht $\ell + \log n$ auch im Allgemeinen?

- Idee: wie letzte Woche
  - suche x in A_1
  - finde x in $A_2, \dots, A_\ell$ mittels Zeiger
- Problem: Position von x in A_i lässt ggf. keine Rückschlüsse auf Position in A_{i+1} zu

Beobachtung

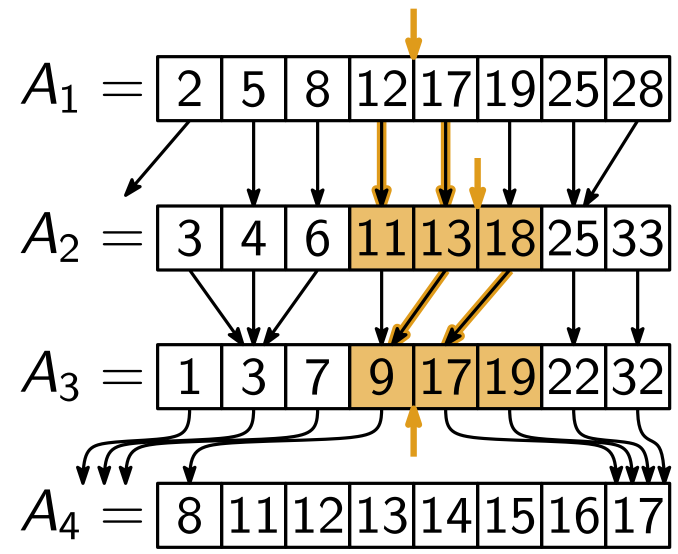
- $A_i \supseteq A_{i+1} \Rightarrow$ Position in A_{i+1} kann aus Position in A_i abgelesen werden
- A_i enthält viele Elemente aus $A_{i+1} \Rightarrow$ grobe Position ablesbar

Suche in vielen Arrays

Situation

- betrachte ℓ sortierte Arrays $A_1, \ldots, A_k$ mit jeweils $\leq n$ Elementen
- finde die Position von einem x in allen Arrays
- Offensichtliche Lösung: $O(\ell \log n)$
- letzte Woche: $O(\ell + \log n)$ falls $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_\ell$

Beispielanfrage: $x = 14$



Geht $\ell + \log n$ auch im Allgemeinen?

- Idee: wie letzte Woche
  - suche x in A_1
  - finde x in $A_2, \ldots, A_\ell$ mittels Zeiger
- Problem: Position von x in A_i lässt ggf. keine Rückschlüsse auf Position in A_{i+1} zu

Beobachtung

- $A_i \supseteq A_{i+1} \Rightarrow$ Position in A_{i+1} kann aus Position in A_i abgelesen werden
- A_i enthält viele Elemente aus $A_{i+1} \Rightarrow$ grobe Position ablesbar
- Idee: füge ein paar Elemente aus A_{i+1} in A_i ein

Fractional Cascading

Geteilte Elemente

- neues Array A'_3: füge jedes zweite Element aus A_4 in A_3 ein

$$A_3 = \boxed{1 \mid 3 \mid 7 \mid 9 \mid 17 \mid 19 \mid 22 \mid 32} \qquad A'_3 = \boxed{1 \mid 3 \mid 7 \mid 8 \mid 9 \mid 12 \mid 14 \mid 16 \mid 17 \mid 19 \mid 22 \mid 32}$$

$$A_4 = \boxed{8 \mid 11 \mid 12 \mid 13 \mid 14 \mid 15 \mid 16 \mid 17} \qquad A_4 = \boxed{8 \mid 11 \mid 12 \mid 13 \mid 14 \mid 15 \mid 16 \mid 17}$$

Fractional Cascading

Geteilte Elemente

- neues Array A_3': füge jedes zweite Element aus A_4 in A_3 ein
- speichere Zeiger zu Kopien

$$A_3 = \boxed{1}\boxed{3}\boxed{7}\boxed{9}\boxed{17}\boxed{19}\boxed{22}\boxed{32} \qquad A_3' = \boxed{1}\boxed{3}\boxed{7}\boxed{8}\boxed{9}\boxed{12}\boxed{14}\boxed{16}\boxed{17}\boxed{19}\boxed{22}\boxed{32}$$

$$A_4 = \boxed{8}\boxed{11}\boxed{12}\boxed{13}\boxed{14}\boxed{15}\boxed{16}\boxed{17} \qquad A_4 = \boxed{8}\boxed{11}\boxed{12}\boxed{13}\boxed{14}\boxed{15}\boxed{16}\boxed{17}$$

Fractional Cascading

Geteilte Elemente

- neues Array A_3': füge jedes zweite Element aus A_4 in A_3 ein
- speichere Zeiger zu Kopien
- Zeiger in A_3': von Elementen aus $A_3' \setminus A_4$ zu Vorgänger/Nachfolger aus A_4

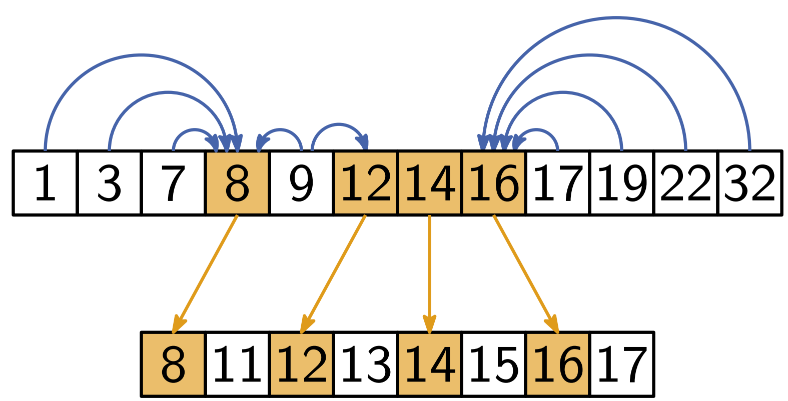
$\Rightarrow$ Position in A_3' liefert Position in A_4 (± 1) Wie?

$A_3 = \boxed{1 \mid 3 \mid 7 \mid 9 \mid 17 \mid 19 \mid 22 \mid 32}$

$A_4 = \boxed{8 \mid 11 \mid 12 \mid 13 \mid 14 \mid 15 \mid 16 \mid 17}$

$A_3' =$

$A_4 =$



Fractional Cascading

Geteilte Elemente

- neues Array A'_3: füge jedes zweite Element aus A_4 in A_3 ein
- speichere Zeiger zu Kopien
- Zeiger in A'_3: von Elementen aus $A'_3 \setminus A_4$ zu Vorgänger/Nachfolger aus A_4

  $\Rightarrow$ Position in A'_3 liefert Position in A_4 (± 1) **Wie?**
- Zeiger in A'_3: von Elementen aus A_4 zu Vorgänger/Nachfolger aus $A'_3 \setminus A_4$

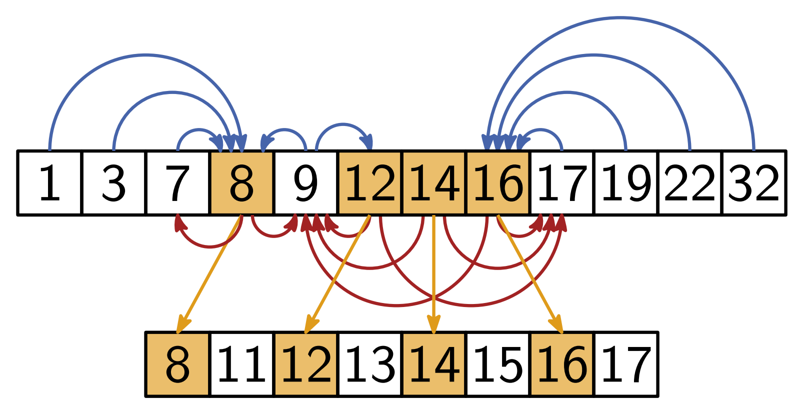
Wozu brauchen wir das?

$A_3 = \boxed{1 \mid 3 \mid 7 \mid 9 \mid 17 \mid 19 \mid 22 \mid 32}$

$A_4 = \boxed{8 \mid 11 \mid 12 \mid 13 \mid 14 \mid 15 \mid 16 \mid 17}$

$A'_3 =$

$A_4 =$



Fractional Cascading

Geteilte Elemente

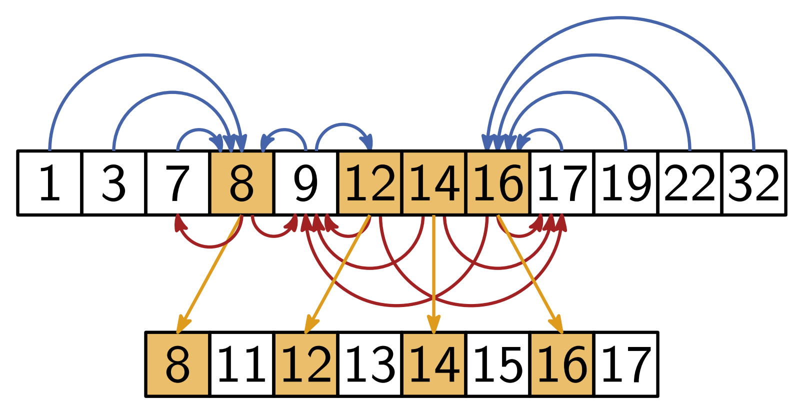
- neues Array A_3': füge jedes zweite Element aus A_4 in A_3 ein
- speichere Zeiger zu Kopien
- Zeiger in A_3': von Elementen aus $A_3' \setminus A_4$ zu Vorgänger/Nachfolger aus A_4
  $\Rightarrow$ Position in A_3' liefert Position in A_4 (± 1) **Wie?**
- Zeiger in A_3': von Elementen aus A_4 zu Vorgänger/Nachfolger aus $A_3' \setminus A_4$
  $\Rightarrow$ Position in A_3' liefert Position in A_3 **Wozu brauchen wir das?**

$A_3 = \boxed{1}\boxed{3}\boxed{7}\boxed{9}\boxed{17}\boxed{19}\boxed{22}\boxed{32}$

$A_4 = \boxed{8}\boxed{11}\boxed{12}\boxed{13}\boxed{14}\boxed{15}\boxed{16}\boxed{17}$

$A_3' =$

$A_4 =$



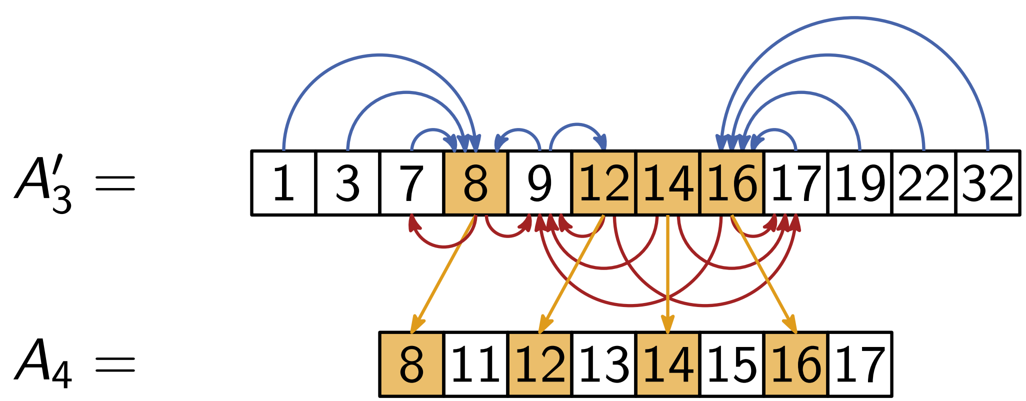
Fractional Cascading

Geteilte Elemente

- neues Array A'_3: füge jedes zweite Element aus A_4 in A_3 ein
- speichere Zeiger zu Kopien
- Zeiger in A'_3: von Elementen aus $A'_3 \setminus A_4$ zu Vorgänger/Nachfolger aus A_4
  $\Rightarrow$ Position in A'_3 liefert Position in A_4 (± 1) Wie?
- Zeiger in A'_3: von Elementen aus A_4 zu Vorgänger/Nachfolger aus $A'_3 \setminus A_4$
  $\Rightarrow$ Position in A'_3 liefert Position in A_3 Wozu brauchen wir das?
- kaskadiere den Prozess für alle vorherigen A_i

$A_3 = $ | 1 | 3 | 7 | 9 | 17 | 19 | 22 | 32 |

$A_4 = $ | 8 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |



Fractional Cascading

Geteilte Elemente

- neues Array A_3': füge jedes zweite Element aus A_4 in A_3 ein
- speichere Zeiger zu Kopien
- Zeiger in A_3': von Elementen aus $A_3' \setminus A_4$ zu Vorgänger/Nachfolger aus A_4
  $\Rightarrow$ Position in A_3' liefert Position in A_4 (± 1)
- Zeiger in A_3': von Elementen aus A_4 zu Vorgänger/Nachfolger aus $A_3' \setminus A_4$
  $\Rightarrow$ Position in A_3' liefert Position in A_3
- kaskadiere den Prozess für alle vorherigen A_i

$$A_1 = \boxed{2}\boxed{5}\boxed{8}\boxed{12}\boxed{17}\boxed{19}\boxed{25}\boxed{28}$$

$$A_2 = \boxed{3}\boxed{4}\boxed{6}\boxed{11}\boxed{13}\boxed{18}\boxed{25}\boxed{33} \qquad A_2' =$$

$$A_3 = \boxed{1}\boxed{3}\boxed{7}\boxed{9}\boxed{17}\boxed{19}\boxed{22}\boxed{32} \qquad A_3' = \boxed{1}\boxed{3}\boxed{7}\boxed{8}\boxed{9}\boxed{12}\boxed{14}\boxed{16}\boxed{17}\boxed{19}\boxed{22}\boxed{32}$$

$$A_4 = \boxed{8}\boxed{11}\boxed{12}\boxed{13}\boxed{14}\boxed{15}\boxed{16}\boxed{17} \qquad A_4 = \boxed{8}\boxed{11}\boxed{12}\boxed{13}\boxed{14}\boxed{15}\boxed{16}\boxed{17}$$

Fractional Cascading

Geteilte Elemente

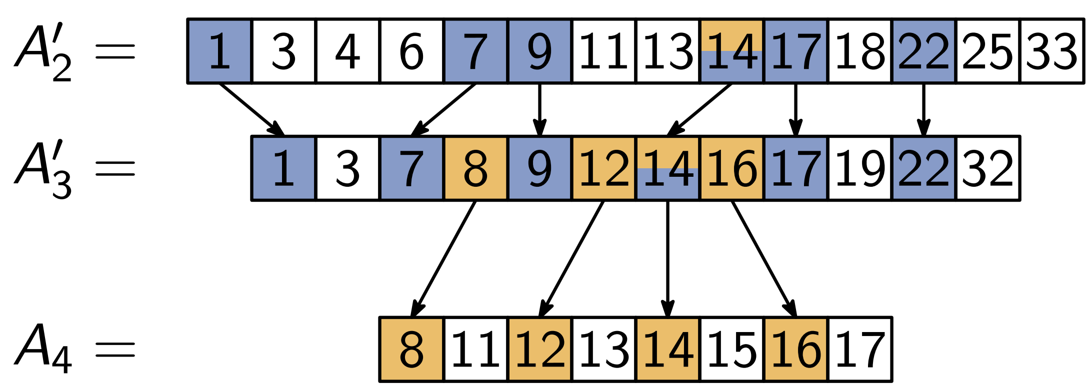
- neues Array A'_3: füge jedes zweite Element aus A_4 in A_3 ein
- speichere Zeiger zu Kopien
- Zeiger in A'_3: von Elementen aus $A'_3 \setminus A_4$ zu Vorgänger/Nachfolger aus A_4
  $\Rightarrow$ Position in A'_3 liefert Position in A_4 (± 1)
- Zeiger in A'_3: von Elementen aus A_4 zu Vorgänger/Nachfolger aus $A'_3 \setminus A_4$
  $\Rightarrow$ Position in A'_3 liefert Position in A_3
- kaskadiere den Prozess für alle vorherigen A_i

$$A_1 = \boxed{2\,|\,5\,|\,8\,|\,12\,|\,17\,|\,19\,|\,25\,|\,28}$$

$$A_2 = \boxed{3\,|\,4\,|\,6\,|\,11\,|\,13\,|\,18\,|\,25\,|\,33}$$

$$A_3 = \boxed{1\,|\,3\,|\,7\,|\,9\,|\,17\,|\,19\,|\,22\,|\,32}$$

$$A_4 = \boxed{8\,|\,11\,|\,12\,|\,13\,|\,14\,|\,15\,|\,16\,|\,17}$$



Fractional Cascading

Geteilte Elemente

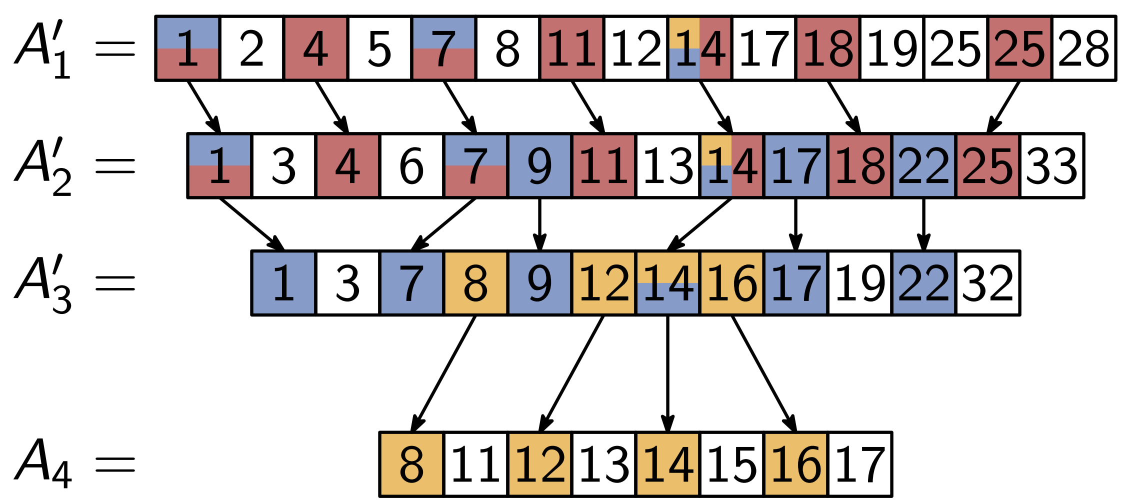
- neues Array A'_3: füge jedes zweite Element aus A_4 in A_3 ein
- speichere Zeiger zu Kopien
- Zeiger in A'_3: von Elementen aus $A'_3 \setminus A_4$ zu Vorgänger/Nachfolger aus A_4
  $\Rightarrow$ Position in A'_3 liefert Position in A_4 (± 1)
- Zeiger in A'_3: von Elementen aus A_4 zu Vorgänger/Nachfolger aus $A'_3 \setminus A_4$
  $\Rightarrow$ Position in A'_3 liefert Position in A_3
- kaskadiere den Prozess für alle vorherigen A_i

$$A_1 = \boxed{2}\boxed{5}\boxed{8}\boxed{12}\boxed{17}\boxed{19}\boxed{25}\boxed{28}$$

$$A_2 = \boxed{3}\boxed{4}\boxed{6}\boxed{11}\boxed{13}\boxed{18}\boxed{25}\boxed{33}$$

$$A_3 = \boxed{1}\boxed{3}\boxed{7}\boxed{9}\boxed{17}\boxed{19}\boxed{22}\boxed{32}$$

$$A_4 = \boxed{8}\boxed{11}\boxed{12}\boxed{13}\boxed{14}\boxed{15}\boxed{16}\boxed{17}$$



Fractional Cascading – Laufzeit

Kosten für die Suche

Fractional Cascading – Laufzeit

Kosten für die Suche

- eine Suche in $A'_1 \to O(\log(|A'_1|))$
- $O(1)$ für jedes nachfolgende Array $\to O(\ell)$
- Gesamtlaufzeit: $O(\ell + \log(|A'_1|))$

Fractional Cascading – Laufzeit

Kosten für die Suche

- eine Suche in $A_1' \to O(\log(|A_1'|))$
- $O(1)$ für jedes nachfolgende Array $\to O(\ell)$
- Gesamtlaufzeit: $O(\ell + \log(|A_1'|))$

Wie groß wird A_1'?

(Annahme: $|A_i| = n$ für alle i)

Fractional Cascading – Laufzeit

Kosten für die Suche

- eine Suche in $A'_1 \to O(\log(|A'_1|))$
- $O(1)$ für jedes nachfolgende Array $\to O(\ell)$
- Gesamtlaufzeit: $O(\ell + \log(|A'_1|))$

Wie groß wird A'_1?

(Annahme: $|A_i| = n$ für alle i)

- $|A'_{\ell-1}| = (\frac{1}{2} + 1)n$

Fractional Cascading – Laufzeit

Kosten für die Suche

- eine Suche in $A'_1 \rightarrow O(\log(|A'_1|))$
- $O(1)$ für jedes nachfolgende Array $\rightarrow O(\ell)$
- Gesamtlaufzeit: $O(\ell + \log(|A'_1|))$

Wie groß wird A'_1?

(Annahme: $|A_i| = n$ für alle i)

- $|A'_{\ell-1}| = (\frac{1}{2} + 1)n$
- $|A'_{\ell-2}| = (\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1)n$

Fractional Cascading – Laufzeit

Karlsruher Institut für Technologie

Kosten für die Suche

- eine Suche in $A'_1 \to O(\log(|A'_1|))$
- $O(1)$ für jedes nachfolgende Array $\to O(\ell)$
- Gesamtlaufzeit: $O(\ell + \log(|A'_1|))$

Wie groß wird A'_1?

(Annahme: $|A_i| = n$ für alle i)

- $|A'_{\ell-1}| = (\frac{1}{2} + 1)n$
- $|A'_{\ell-2}| = (\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1)n$
- $|A'_{\ell-3}| = (\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1)n$

Fractional Cascading – Laufzeit

Kosten für die Suche

- eine Suche in $A'_1 \to O(\log(|A'_1|))$
- $O(1)$ für jedes nachfolgende Array $\to O(\ell)$
- Gesamtlaufzeit: $O(\ell + \log(|A'_1|))$

Wie groß wird A'_1?

(Annahme: $|A_i| = n$ für alle i)

- $|A'_{\ell-1}| = (\frac{1}{2} + 1)n$
- $|A'_{\ell-2}| = (\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1)n$
- $|A'_{\ell-3}| = (\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1)n$
- $|A'_1| \leq 2n$ $\Rightarrow$ Suche geht in $O(\ell + \log n)$

Fractional Cascading – Laufzeit

Kosten für die Suche

- eine Suche in $A'_1 \to O(\log(|A'_1|))$
- $O(1)$ für jedes nachfolgende Array $\to O(\ell)$
- Gesamtlaufzeit: $O(\ell + \log(|A'_1|))$

Wie groß wird A'_1?

(Annahme: $|A_i| = n$ für alle i)

- $|A'_{\ell-1}| = (\frac{1}{2} + 1)n$
- $|A'_{\ell-2}| = (\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1)n$
- $|A'_{\ell-3}| = (\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1)n$
- $|A'_1| \leq 2n$ $\Rightarrow$ Suche geht in $O(\ell + \log n)$

Speicherverbrauch

- nur ein konstanter Faktor Overhead
- stimmt auch wenn nicht alle Arrays gleich groß sind

Fractional Cascading – Laufzeit

Kosten für die Suche

- eine Suche in $A'_1 \to O(\log(|A'_1|))$
- $O(1)$ für jedes nachfolgende Array $\to O(\ell)$
- Gesamtlaufzeit: $O(\ell + \log(|A'_1|))$

Wie groß wird A'_1?

(Annahme: $|A_i| = n$ für alle i)

- $|A'_{\ell-1}| = (\frac{1}{2} + 1)n$
- $|A'_{\ell-2}| = (\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1)n$
- $|A'_{\ell-3}| = (\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1)n$
- $|A'_1| \leq 2n$ $\Rightarrow$ Suche geht in $O(\ell + \log n)$

Speicherverbrauch

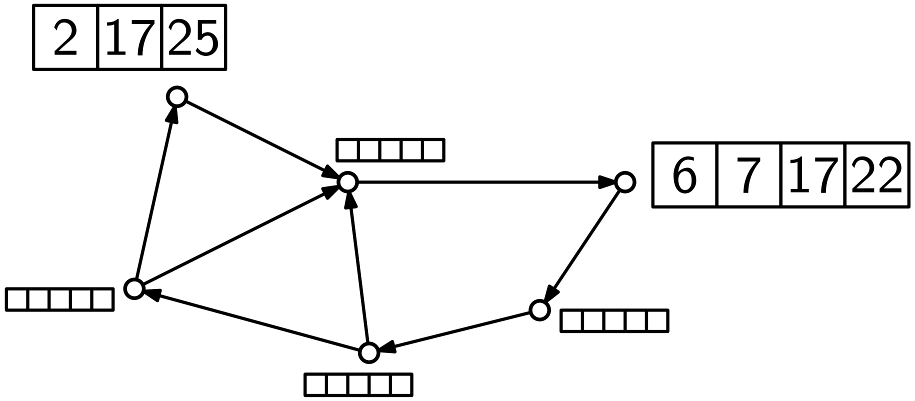
- nur ein konstanter Faktor Overhead
- stimmt auch wenn nicht alle Arrays gleich groß sind

Vorberechnung

- linear in der Eingabegröße

Wie?

Fractional Cascading – etwas allgemeiner



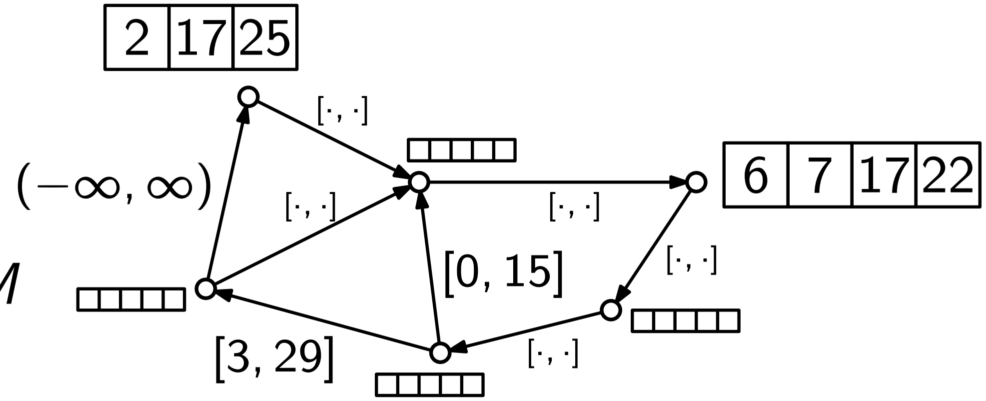
Ausgangssituation

- eine geordnete Menge M
- gerichteter Graph $G = (V, E)$
- pro Knoten v: sortiertes Array $A_v \subseteq M$

Fractional Cascading – etwas allgemeiner

Ausgangssituation

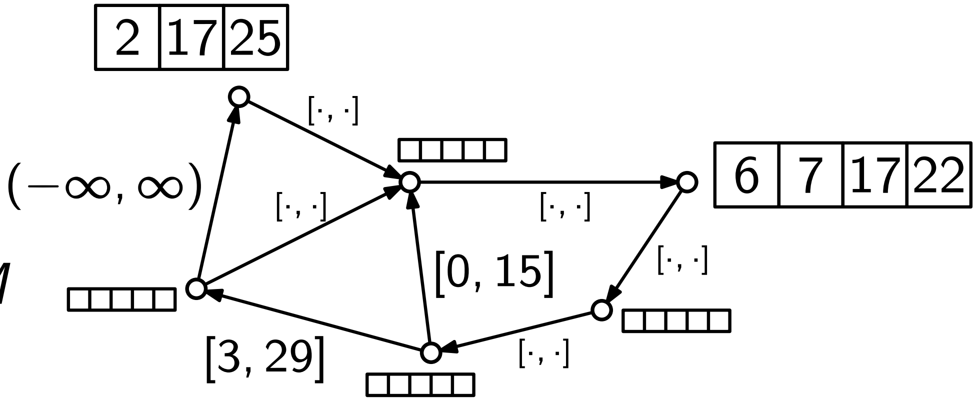
- eine geordnete Menge M
- gerichteter Graph $G = (V, E)$
- pro Knoten v: sortiertes Array $A_v \subseteq M$
- pro Kante e: ein Intervall $I_e \subseteq M$



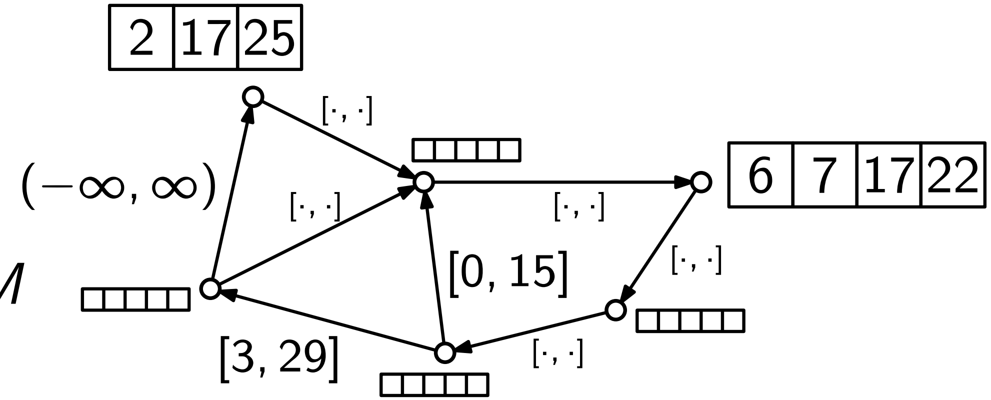
Fractional Cascading – etwas allgemeiner

Ausgangssituation

- eine geordnete Menge M
- gerichteter Graph $G = (V, E)$
- pro Knoten v: sortiertes Array $A_v \subseteq M$
- pro Kante e: ein Intervall $I_e \subseteq M$
- für jedes $x \in M$ und $v \in V$ ist der Grad von v eingeschränkt auf Kanten mit x in ihrem Intervall konstant



Fractional Cascading – etwas allgemeiner



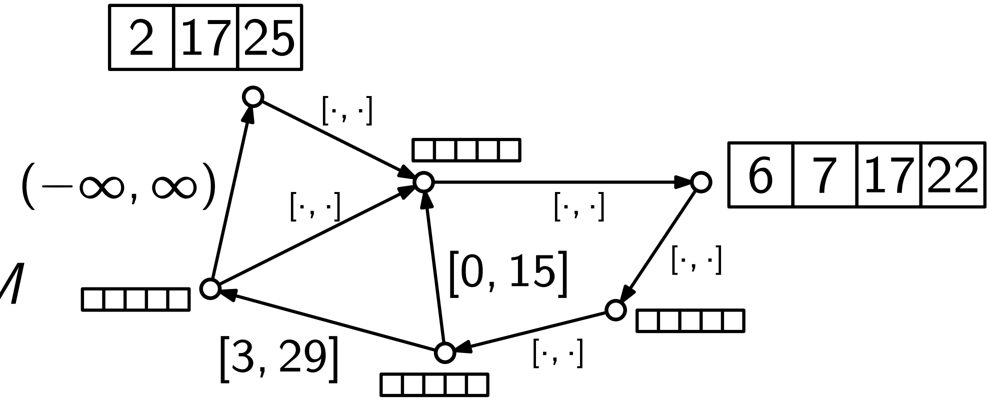
Ausgangssituation

- eine geordnete Menge M
- gerichteter Graph $G = (V, E)$
- pro Knoten v: sortiertes Array $A_v \subseteq M$
- pro Kante e: ein Intervall $I_e \subseteq M$
- für jedes $x \in M$ und $v \in V$ ist der Grad von v eingeschränkt auf Kanten mit x in ihrem Intervall konstant

Ein Spiel zwischen Alice und Bob

Fractional Cascading – etwas allgemeiner

Ausgangssituation



- eine geordnete Menge M
- gerichteter Graph $G = (V, E)$
- pro Knoten v: sortiertes Array $A_v \subseteq M$
- pro Kante e: ein Intervall $I_e \subseteq M$
- für jedes $x \in M$ und $v \in V$ ist der Grad von v eingeschränkt auf Kanten mit x in ihrem Intervall konstant

Ein Spiel zwischen Alice und Bob

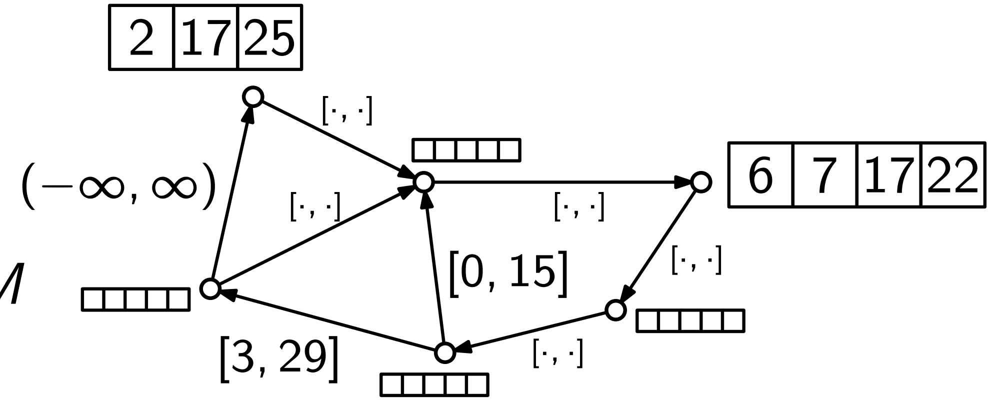
- darf Datenstrukturen vorberechnen

- sucht sich ein $x \in M$ aus
- sucht sich ein $u \in V$ aus

Fractional Cascading – etwas allgemeiner

Ausgangssituation

- eine geordnete Menge M
- gerichteter Graph $G = (V, E)$
- pro Knoten v: sortiertes Array $A_v \subseteq M$
- pro Kante e: ein Intervall $I_e \subseteq M$
- für jedes $x \in M$ und $v \in V$ ist der Grad von v eingeschränkt auf Kanten mit x in ihrem Intervall konstant



Ein Spiel zwischen Alice und Bob

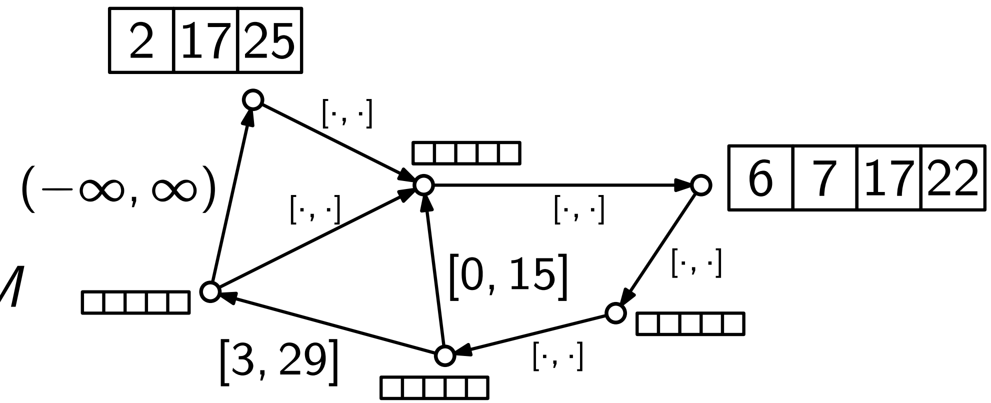
- darf Datenstrukturen vorberechnen

- sucht sich ein $x \in M$ aus
- sucht sich ein $u \in V$ aus
- fragt wo x in A_u liegt

Fractional Cascading – etwas allgemeiner

Ausgangssituation

- eine geordnete Menge M
- gerichteter Graph $G = (V, E)$
- pro Knoten v: sortiertes Array $A_v \subseteq M$
- pro Kante e: ein Intervall $I_e \subseteq M$
- für jedes $x \in M$ und $v \in V$ ist der Grad von v eingeschränkt auf Kanten mit x in ihrem Intervall konstant



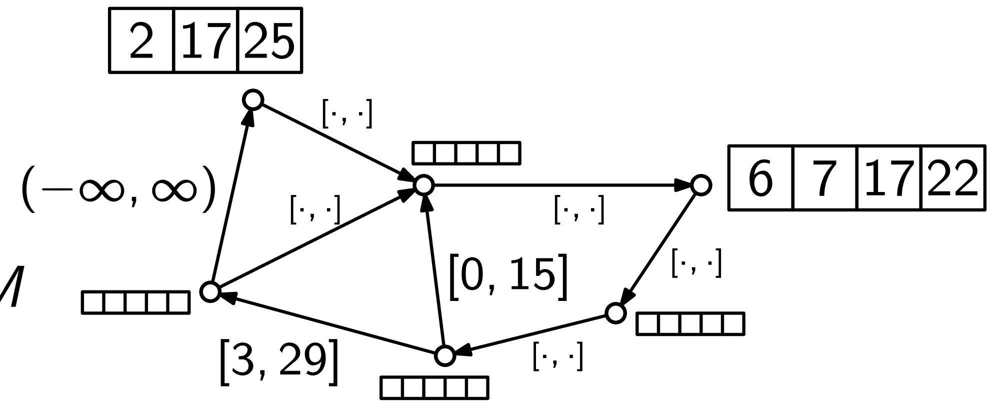
Ein Spiel zwischen Alice und Bob

- darf Datenstrukturen vorberechnen
- beantwortet die Frage

- sucht sich ein $x \in M$ aus
- sucht sich ein $u \in V$ aus
- fragt wo x in A_u liegt

Fractional Cascading – etwas allgemeiner

Ausgangssituation



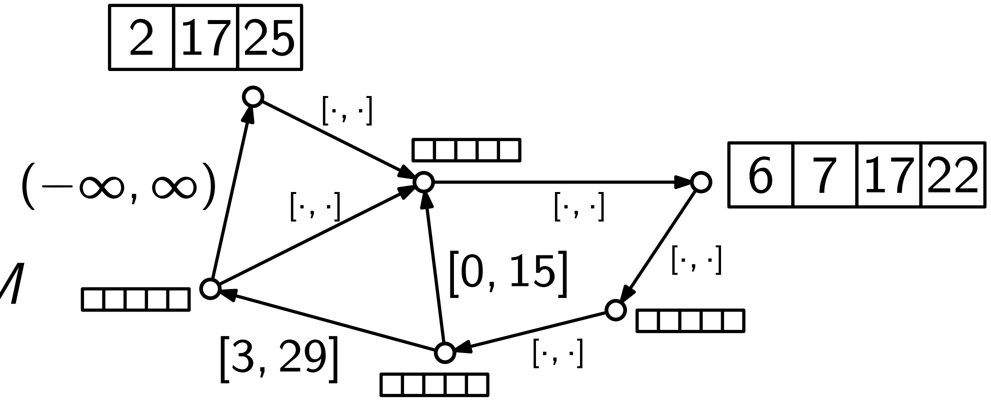
- eine geordnete Menge M
- gerichteter Graph $G = (V, E)$
- pro Knoten v: sortiertes Array $A_v \subseteq M$
- pro Kante e: ein Intervall $I_e \subseteq M$
- für jedes $x \in M$ und $v \in V$ ist der Grad von v eingeschränkt auf Kanten mit x in ihrem Intervall konstant

Ein Spiel zwischen Alice und Bob

- darf Datenstrukturen vorberechnen
- beantwortet die Frage

- sucht sich ein $x \in M$ aus
- sucht sich ein $u \in V$ aus
- fragt wo x in A_u liegt
- wählt Kante uv mit $x \in I_{uv}$

Fractional Cascading – etwas allgemeiner



Ausgangssituation

- eine geordnete Menge M
- gerichteter Graph $G = (V, E)$
- pro Knoten v: sortiertes Array $A_v \subseteq M$
- pro Kante e: ein Intervall $I_e \subseteq M$
- für jedes $x \in M$ und $v \in V$ ist der Grad von v eingeschränkt auf Kanten mit x in ihrem Intervall konstant

Ein Spiel zwischen Alice und Bob

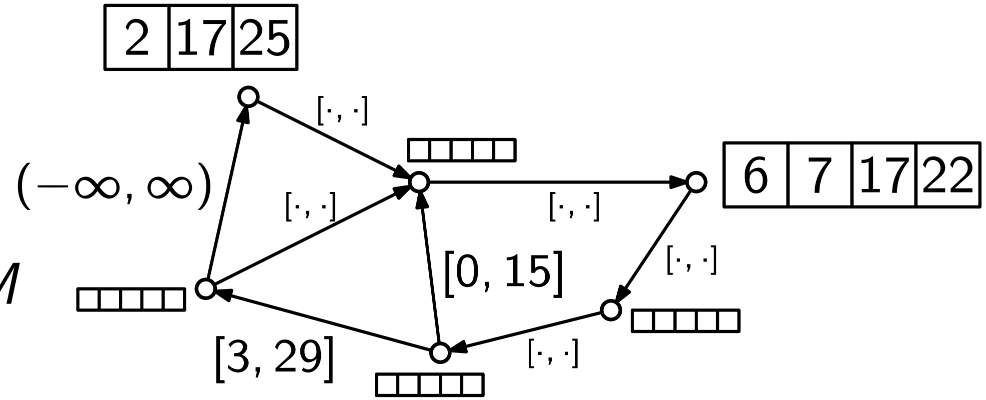
- darf Datenstrukturen vorberechnen
- beantwortet die Frage

- sucht sich ein $x \in M$ aus
- sucht sich ein $u \in V$ aus
- fragt wo x in A_u liegt
- wählt Kante uv mit $x \in I_{uv}$
- fragt wo x in A_v liegt

Fractional Cascading – etwas allgemeiner

Ausgangssituation

- eine geordnete Menge M
- gerichteter Graph $G = (V, E)$
- pro Knoten v: sortiertes Array $A_v \subseteq M$
- pro Kante e: ein Intervall $I_e \subseteq M$
- für jedes $x \in M$ und $v \in V$ ist der Grad von v eingeschränkt auf Kanten mit x in ihrem Intervall konstant



Ein Spiel zwischen Alice und Bob

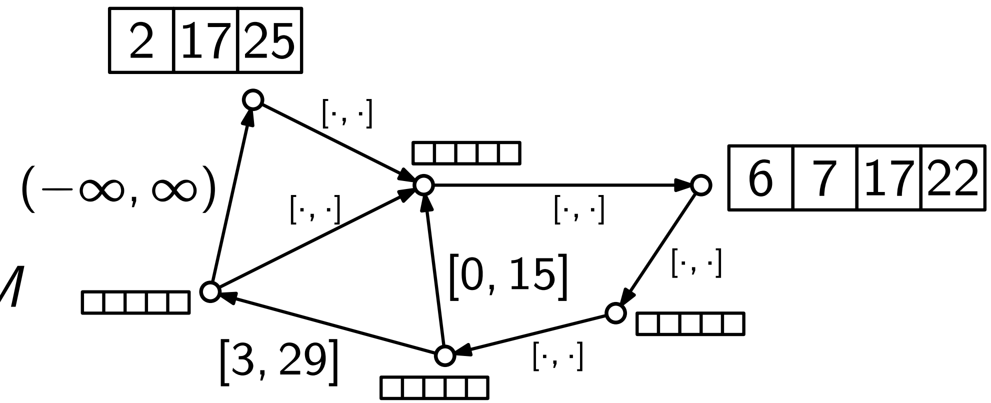
- darf Datenstrukturen vorberechnen
- beantwortet die Frage
- beantwortet die Frage

- sucht sich ein $x \in M$ aus
- sucht sich ein $u \in V$ aus
- fragt wo x in A_u liegt
- wählt Kante uv mit $x \in I_{uv}$
- fragt wo x in A_v liegt

Fractional Cascading – etwas allgemeiner

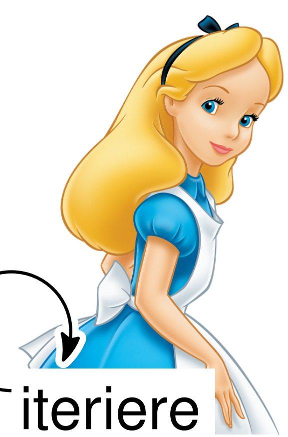
Ausgangssituation

- eine geordnete Menge M
- gerichteter Graph $G = (V, E)$
- pro Knoten v: sortiertes Array $A_v \subseteq M$
- pro Kante e: ein Intervall $I_e \subseteq M$
- für jedes $x \in M$ und $v \in V$ ist der Grad von v eingeschränkt auf Kanten mit x in ihrem Intervall konstant



Ein Spiel zwischen Alice und Bob

- darf Datenstrukturen vorberechnen
- beantwortet die Frage
- beantwortet die Frage



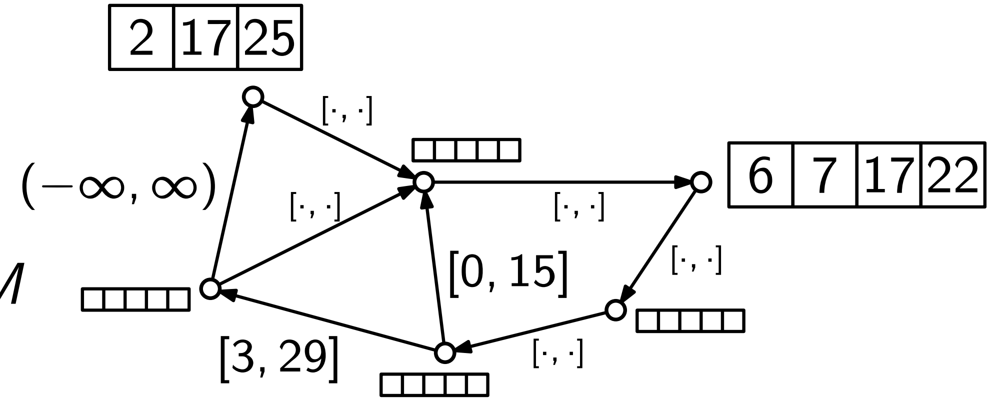
iteriere

- sucht sich ein $x \in M$ aus
- sucht sich ein $u \in V$ aus
- fragt wo x in A_u liegt
- wählt Kante uv mit $x \in I_{uv}$
- fragt wo x in A_v liegt

Fractional Cascading – etwas allgemeiner

Ausgangssituation

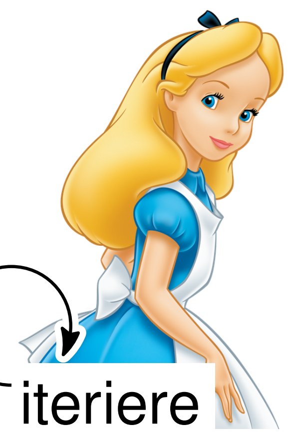
- eine geordnete Menge M
- gerichteter Graph $G = (V, E)$
- pro Knoten v: sortiertes Array $A_v \subseteq M$
- pro Kante e: ein Intervall $I_e \subseteq M$
- für jedes $x \in M$ und $v \in V$ ist der Grad von v eingeschränkt auf Kanten mit x in ihrem Intervall konstant



Ist das eine Verallgemeinerung?

Ein Spiel zwischen Alice und Bob

- darf Datenstrukturen vorberechnen
- beantwortet die Frage
- beantwortet die Frage



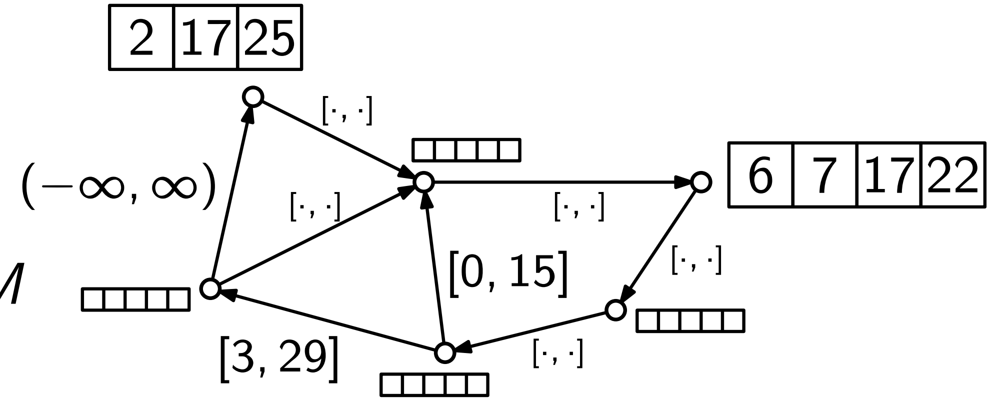
iteriere

- sucht sich ein $x \in M$ aus
- sucht sich ein $u \in V$ aus
- fragt wo x in A_u liegt
- wählt Kante uv mit $x \in I_{uv}$
- fragt wo x in A_v liegt

Fractional Cascading – etwas allgemeiner

Ausgangssituation

- eine geordnete Menge M
- gerichteter Graph $G = (V, E)$
- pro Knoten v: sortiertes Array $A_v \subseteq M$
- pro Kante e: ein Intervall $I_e \subseteq M$
- für jedes $x \in M$ und $v \in V$ ist der Grad von v eingeschränkt auf Kanten mit x in ihrem Intervall konstant



Ist das eine Verallgemeinerung?

Ein Spiel zwischen Alice und Bob

- darf Datenstrukturen vorberechnen
- beantwortet die Frage
- beantwortet die Frage

iteriere

- sucht sich ein $x \in M$ aus
- sucht sich ein $u \in V$ aus
- fragt wo x in A_u liegt
- wählt Kante uv mit $x \in I_{uv}$
- fragt wo x in A_v liegt

Was sollte Bob tun?

Wie lange braucht er dafür?

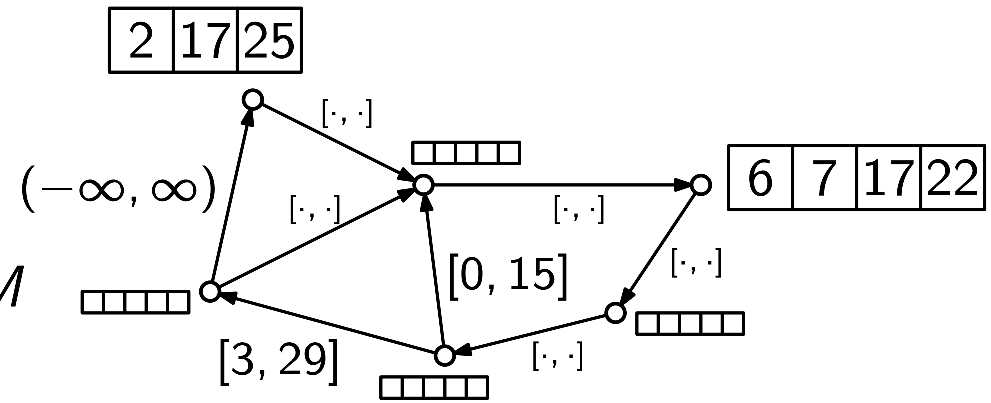
Wie viel Platz braucht er?

Wie lange braucht er zum Antworten?

Fractional Cascading – etwas allgemeiner

Ausgangssituation

- eine geordnete Menge M
- gerichteter Graph $G = (V, E)$
- pro Knoten v: sortiertes Array $A_v \subseteq M$
- pro Kante e: ein Intervall $I_e \subseteq M$
- für jedes $x \in M$ und $v \in V$ ist der Grad von v eingeschränkt auf Kanten mit x in ihrem Intervall konstant



Ein Spiel zwischen Alice und Bob

- darf Datenstrukturen vorberechnen
- beantwortet die Frage
- beantwortet die Frage

- sucht sich ein $x \in M$ aus
- sucht sich ein $u \in V$ aus
- fragt wo x in A_u liegt
- wählt Kante uv mit $x \in I_{uv}$
- fragt wo x in A_v liegt

Vorberechnung: $O(s)$ Zeit und $O(s)$ Platz

Anfrage: $O(\log s)$ für die erste, danach $O(1)$ (s = Gesamtgröße der Arrays)

Zurück zu den Bereichsanfragen

2-D: $O(n \log n)$ Vorberechnung/Speicher und $O(\log n + k)$ pro Anfrage
jede weiter Dimension: kostet einen $\log n$ Faktor

Zurück zu den Bereichsanfragen

2-D: $O(n \log n)$ Vorberechnung/Speicher und $O(\log n + k)$ pro Anfrage

jede weiter Dimension: kostet einen $\log n$ Faktor

Genauere Laufzeitbetrachtung des 3D-Falls

- Anfrage: $\underbrace{[a_1, b_1]}_{x} \times \underbrace{[a_2, b_2]}_{y} \times \underbrace{[a_3, b_3]}_{z}$

  Richtung: x, y, z

Zurück zu den Bereichsanfragen

2-D: $O(n \log n)$ Vorberechnung/Speicher und $O(\log n + k)$ pro Anfrage
jede weiter Dimension: kostet einen $\log n$ Faktor

Genauere Laufzeitbetrachtung des 3D-Falls

- Anfrage: $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$
  Richtung: x, y, z
- binärer Suchbaum für x-Richtung
- jeder Knoten des x-Baums enthält 2D-DS (auf der zugehörigen Punktemenge)
- suche nach $[a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ in den 2D-Datenstrukturen für $O(\log n)$ Knoten

Zurück zu den Bereichsanfragen

2-D: $O(n \log n)$ Vorberechnung/Speicher und $O(\log n + k)$ pro Anfrage
jede weiter Dimension: kostet einen $\log n$ Faktor
Genauere Laufzeitbetrachtung des 3D-Falls

- Anfrage: $\underset{x}{[a_1, b_1]} \times \underset{y}{[a_2, b_2]} \times \underset{z}{[a_3, b_3]}$
  Richtung:
- binärer Suchbaum für x-Richtung
- jeder Knoten des x-Baums enthält 2D-DS (auf der zugehörigen Punktemenge)
- suche nach $[a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ in den 2D-Datenstrukturen für $O(\log n)$ Knoten
  - binärer Suchbaum für y-Richtung

Zurück zu den Bereichsanfragen

2-D: $O(n \log n)$ Vorberechnung/Speicher und $O(\log n + k)$ pro Anfrage

jede weiter Dimension: kostet einen $\log n$ Faktor

Genauere Laufzeitbetrachtung des 3D-Falls

- Anfrage: $\underset{x}{[a_1, b_1]} \times \underset{y}{[a_2, b_2]} \times \underset{z}{[a_3, b_3]}$
  Richtung:
- binärer Suchbaum für x-Richtung
- jeder Knoten des x-Baums enthält 2D-DS (auf der zugehörigen Punktemenge)
- suche nach $[a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ in den 2D-Datenstrukturen für $O(\log n)$ Knoten
  - binärer Suchbaum für y-Richtung
  - nach z sortiertes Array für jeden Knoten im y-Baum

Zurück zu den Bereichsanfragen

2-D: $O(n \log n)$ Vorberechnung/Speicher und $O(\log n + k)$ pro Anfrage

jede weiter Dimension: kostet einen $\log n$ Faktor

Genauere Laufzeitbetrachtung des 3D-Falls

- Anfrage: $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$
  Richtung: x y z
- binärer Suchbaum für x-Richtung
- jeder Knoten des x-Baums enthält 2D-DS (auf der zugehörigen Punktemenge)
- suche nach $[a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ in den 2D-Datenstrukturen für $O(\log n)$ Knoten
  - binärer Suchbaum für y-Richtung
  - nach z sortiertes Array für jeden Knoten im y-Baum
  - suche nach $[a_3, b_3]$ im z-Array der y-Wurzel

Zurück zu den Bereichsanfragen

2-D: $O(n \log n)$ Vorberechnung/Speicher und $O(\log n + k)$ pro Anfrage

jede weiter Dimension: kostet einen $\log n$ Faktor

Genauere Laufzeitbetrachtung des 3D-Falls

- Anfrage: $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$
  Richtung: x y z
- binärer Suchbaum für x-Richtung
- jeder Knoten des x-Baums enthält 2D-DS (auf der zugehörigen Punktemenge)
- suche nach $[a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ in den 2D-Datenstrukturen für $O(\log n)$ Knoten
  - binärer Suchbaum für y-Richtung
  - nach z sortiertes Array für jeden Knoten im y-Baum
  - suche nach $[a_3, b_3]$ im z-Array der y-Wurzel
  - laufe y-Baum runter (suche $[a_2, b_2]$, verfolge $[a_3, b_3]$)

Zurück zu den Bereichsanfragen

2-D: $O(n \log n)$ Vorberechnung/Speicher und $O(\log n + k)$ pro Anfrage

jede weiter Dimension: kostet einen $\log n$ Faktor

Genauere Laufzeitbetrachtung des 3D-Falls

- Anfrage: $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$
  Richtung: x y z
- binärer Suchbaum für x-Richtung
- jeder Knoten des x-Baums enthält 2D-DS (auf der zugehörigen Punktemenge)
- suche nach $[a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ in den 2D-Datenstrukturen für $O(\log n)$ Knoten
  - binärer Suchbaum für y-Richtung
  - nach z sortiertes Array für jeden Knoten im y-Baum
  - suche nach $[a_3, b_3]$ im z-Array der y-Wurzel $\rightarrow O(\log n)$
  - laufe y-Baum runter (suche $[a_2, b_2]$, verfolge $[a_3, b_3]$) $\rightarrow O(\log n)$

Zurück zu den Bereichsanfragen

2-D: $O(n \log n)$ Vorberechnung/Speicher und $O(\log n + k)$ pro Anfrage

jede weiter Dimension: kostet einen $\log n$ Faktor

Genauere Laufzeitbetrachtung des 3D-Falls

- Anfrage: $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$
  Richtung: x, y, z
- binärer Suchbaum für x-Richtung
- jeder Knoten des x-Baums enthält 2D-DS (auf der zugehörigen Punktemenge)
- suche nach $[a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ in den 2D-Datenstrukturen für $O(\log n)$ Knoten
  - binärer Suchbaum für y-Richtung
  - nach z sortiertes Array für jeden Knoten im y-Baum
  - suche nach $[a_3, b_3]$ im z-Array der y-Wurzel $\to O(\log n)$
  - laufe y-Baum runter (suche $[a_2, b_2]$, verfolge $[a_3, b_3]$) $\to O(\log n)$
- Gesamtlaufzeit: $O(\log n \cdot \log n + \log n \cdot \log n)$

Zurück zu den Bereichsanfragen

Karlsruher Institut für Technologie

2-D: $O(n \log n)$ Vorberechnung/Speicher und $O(\log n + k)$ pro Anfrage

jede weiter Dimension: kostet einen $\log n$ Faktor

Genauere Laufzeitbetrachtung des 3D-Falls

- Anfrage: $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$
  Richtung: x y z
- binärer Suchbaum für x-Richtung
- jeder Knoten des x-Baums enthält 2D-DS (auf der zugehörigen Punktemenge)
- suche nach $[a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ in den 2D-Datenstrukturen für $O(\log n)$ Knoten
  - binärer Suchbaum für y-Richtung
  - nach z sortiertes Array für jeden Knoten im y-Baum
  - suche nach $[a_3, b_3]$ im z-Array der y-Wurzel $\rightarrow O(\log n)$
  - laufe y-Baum runter (suche $[a_2, b_2]$, verfolge $[a_3, b_3]$) $\rightarrow O(\log n)$
- Gesamtlaufzeit: $O(\log n \cdot \log n + \log n \cdot \log n)$
- $\log n \cdot \log n$ werden wir „leicht“ los:

Zurück zu den Bereichsanfragen

Karlsruher Institut für Technologie

2-D: $O(n \log n)$ Vorberechnung/Speicher und $O(\log n + k)$ pro Anfrage

jede weiter Dimension: kostet einen $\log n$ Faktor

Genauere Laufzeitbetrachtung des 3D-Falls

- Anfrage: $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$
  Richtung: x y z
- binärer Suchbaum für x-Richtung
- jeder Knoten des x-Baums enthält 2D-DS (auf der zugehörigen Punktemenge)
- suche nach $[a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ in den 2D-Datenstrukturen für $O(\log n)$ Knoten
  - binärer Suchbaum für y-Richtung
  - nach z sortiertes Array für jeden Knoten im y-Baum
  - suche nach $[a_3, b_3]$ im z-Array der y-Wurzel $\rightarrow O(\log n)$
  - laufe y-Baum runter (suche $[a_2, b_2]$, verfolge $[a_3, b_3]$) $\rightarrow O(\log n)$
- Gesamtlaufzeit: $O(\log n \cdot \log n + \log n \cdot \log n)$
- $\log n \cdot \log n$ werden wir „leicht“ los:
  - suche nach $[a_3, b_3]$ im z-Array der x-Wurzel
  - verfolge $[a_3, b_3]$ beim runterlaufen im x-Baum

Zurück zu den Bereichsanfragen

2-D: $O(n \log n)$ Vorberechnung/Speicher und $O(\log n + k)$ pro Anfrage
jede weiter Dimension: kostet einen $\log n$ Faktor
Genauere Laufzeitbetrachtung des 3D-Falls

- Anfrage: $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$
  Richtung: x y z
- binärer Suchbaum für x-Richtung
- jeder Knoten des x-Baums enthält 2D-DS (auf der zugehörigen Punktemenge)
- suche nach $[a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ in den 2D-Datenstrukturen für $O(\log n)$ Knoten
  - binärer Suchbaum für y-Richtung
  - nach z sortiertes Array für jeden Knoten im y-Baum
  - suche nach $[a_3, b_3]$ im z-Array der y-Wurzel $\rightarrow O(\log n)$
  - laufe y-Baum runter (suche $[a_2, b_2]$, verfolge $[a_3, b_3]$) $\rightarrow O(\log n)$
- Gesamtlaufzeit: $O(\log n \cdot \log n + \log n \cdot \log n)$
- $\log n \cdot \log n$ werden wir „leicht“ los:
  - suche nach $[a_3, b_3]$ im z-Array der x-Wurzel
  - verfolge $[a_3, b_3]$ beim runterlaufen im x-Baum

Ziel im Folgenden:
reduziere im 2D-Fall $\log n + \log n$ auf $\log n$
(einmal nach z suchen)

Halbe 2D-Bereichsanfragen

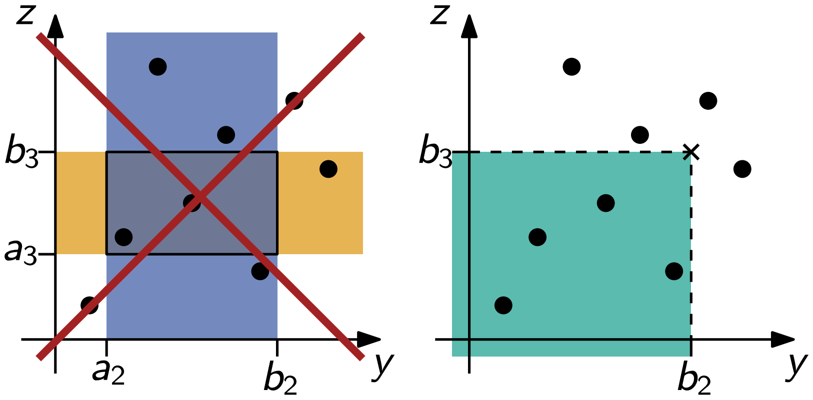
Ziel im Folgenden:
reduziere im 2D-Fall $\log n + \log n$ auf $\log n$
(einmal nach z suchen)

Halbe 2D-Bereichsanfragen

Halbe Bereichsanfragen sind halb so schwer

- Ziel: baue Datenstruktur, die alle Punkte in $(-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$ findet (statt $[a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$)

Ziel im Folgenden:
reduziere im 2D-Fall $\log n + \log n$ auf $\log n$
(einmal nach z suchen)

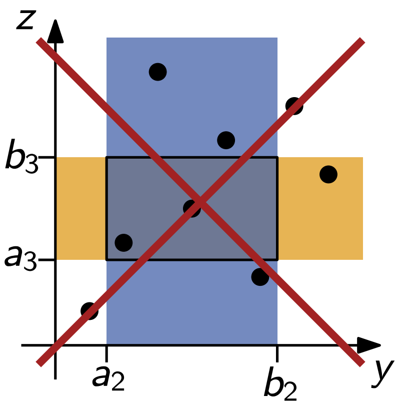


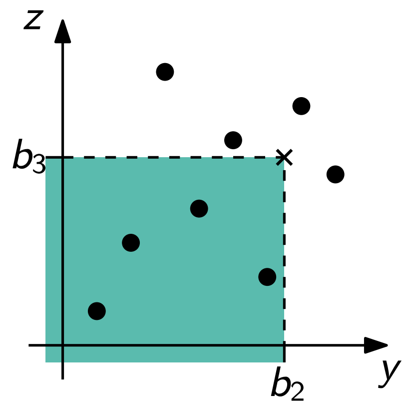
Halbe 2D-Bereichsanfragen

Ziel im Folgenden:
reduziere im 2D-Fall $\log n + \log n$ auf $\log n$
(einmal nach z suchen)

Halbe Bereichsanfragen sind halb so schwer

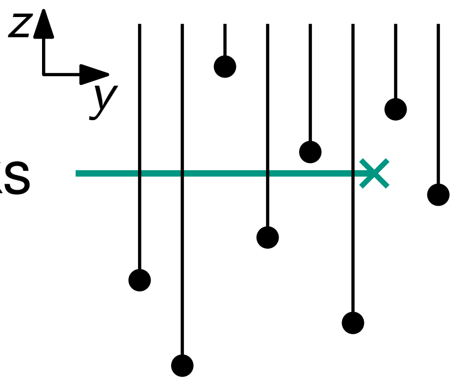
- Ziel: baue Datenstruktur, die alle Punkte in $(-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$ findet (statt $[a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$)





Alternative Sichtweise

- schieße Strahlen von den Punkten nach oben
- Strahl von $\langle b_2, b_3 \rangle$ nach links



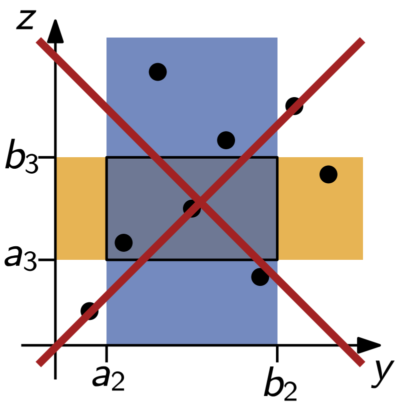
Halbe 2D-Bereichsanfragen

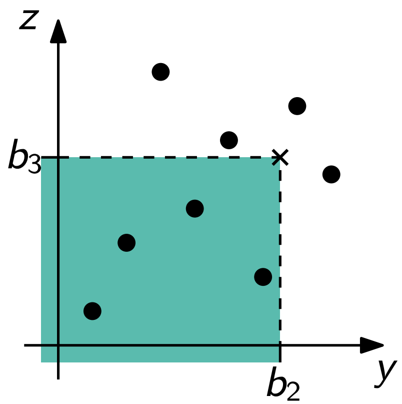
Karlsruher Institut für Technologie

Halbe Bereichsanfragen sind halb so schwer

- Ziel: baue Datenstruktur, die alle Punkte in $(-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$ findet (statt $[a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$)

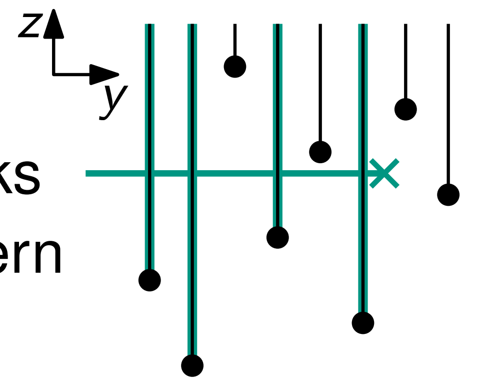
Ziel im Folgenden:
reduziere im 2D-Fall $\log n + \log n$ auf $\log n$
(einmal nach z suchen)





Alternative Sichtweise

- schieße Strahlen von den Punkten nach oben
- Strahl von $\langle b_2, b_3 \rangle$ nach links
- kreuzende Strahlen liefern gewünschte Punkte

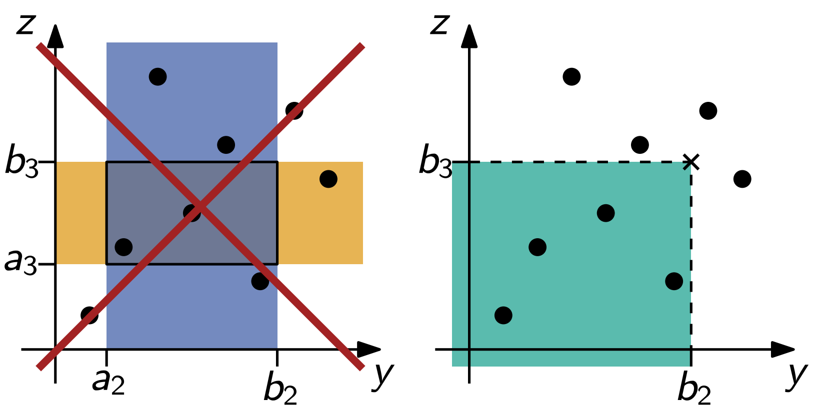


Halbe 2D-Bereichsanfragen

> **Ziel im Folgenden:**
> reduziere im 2D-Fall $\log n + \log n$ auf $\log n$
> (einmal nach z suchen)

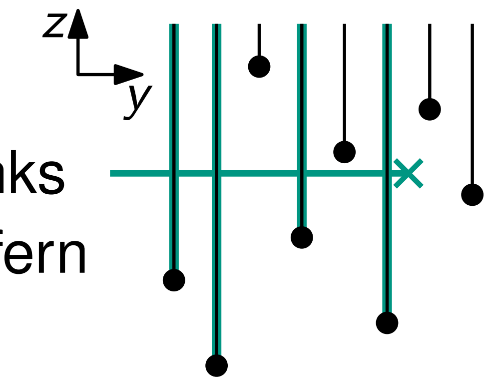
Halbe Bereichsanfragen sind halb so schwer

- Ziel: baue Datenstruktur, die alle Punkte in $(-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$ findet (statt $[a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$)



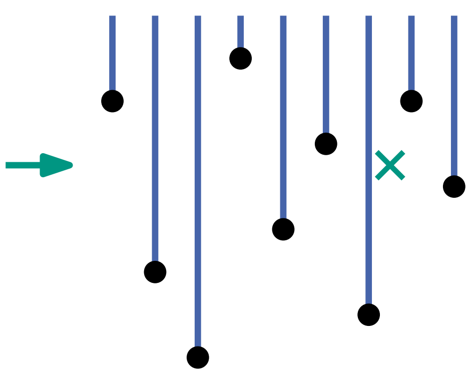
Alternative Sichtweise

- schieße Strahlen von den Punkten nach oben
- Strahl von $\langle b_2, b_3 \rangle$ nach links
- kreuzende Strahlen liefern gewünschte Punkte



Finde die kreuzenden Strahlen

- sammle die kreuzenden Strahlen von links auf

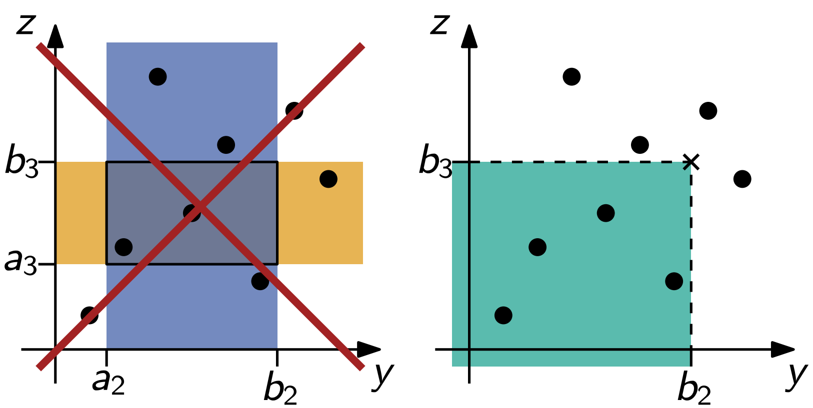


Halbe 2D-Bereichsanfragen

Halbe Bereichsanfragen sind halb so schwer

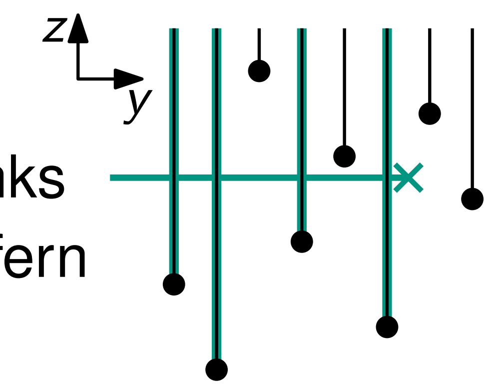
- Ziel: baue Datenstruktur, die alle Punkte in $(-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$ findet (statt $[a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$)

Ziel im Folgenden:
reduziere im 2D-Fall $\log n + \log n$ auf $\log n$
(einmal nach z suchen)



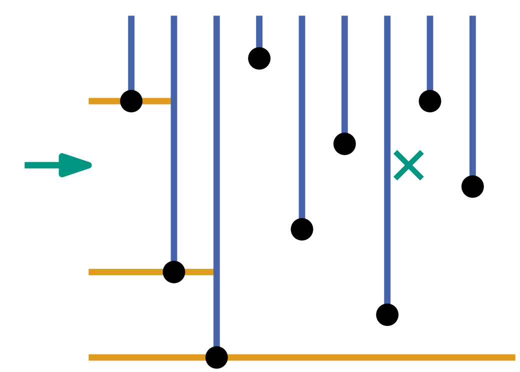
Alternative Sichtweise

- schieße Strahlen von den Punkten nach oben
- Strahl von $\langle b_2, b_3 \rangle$ nach links
- kreuzende Strahlen liefern gewünschte Punkte



Finde die kreuzenden Strahlen

- sammle die kreuzenden Strahlen von links auf
- pro Schritt: eine Suche in z-Richtung

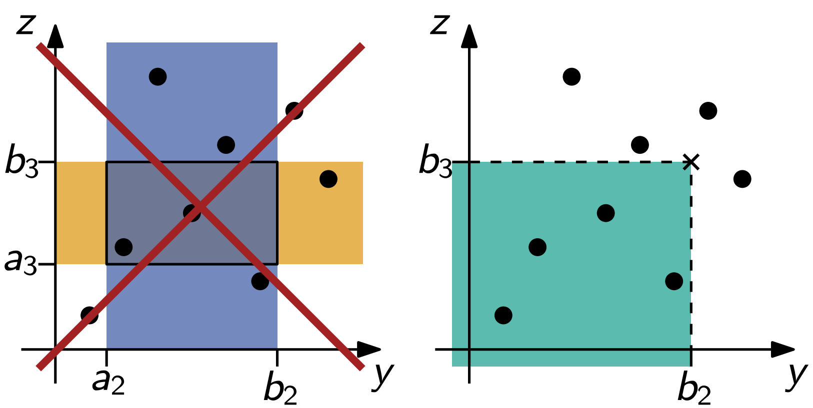


Halbe 2D-Bereichsanfragen

Halbe Bereichsanfragen sind halb so schwer

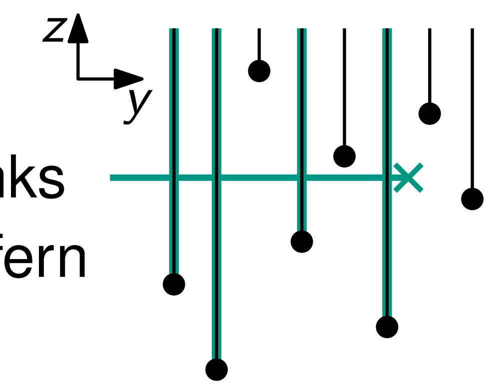
- Ziel: baue Datenstruktur, die alle Punkte in $(-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$ findet (statt $[a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$)

Ziel im Folgenden:
reduziere im 2D-Fall $\log n + \log n$ auf $\log n$
(einmal nach z suchen)



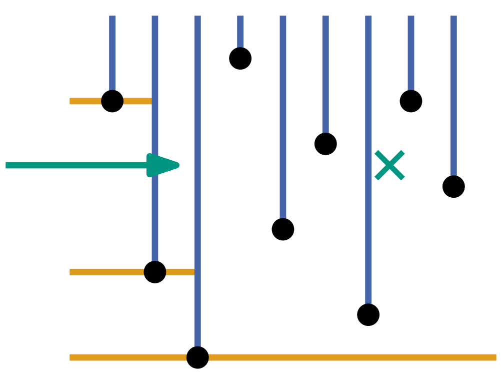
Alternative Sichtweise

- schieße Strahlen von den Punkten nach oben
- Strahl von $\langle b_2, b_3 \rangle$ nach links
- kreuzende Strahlen liefern gewünschte Punkte



Finde die kreuzenden Strahlen

- sammle die kreuzenden Strahlen von links auf
- pro Schritt: eine Suche in z-Richtung

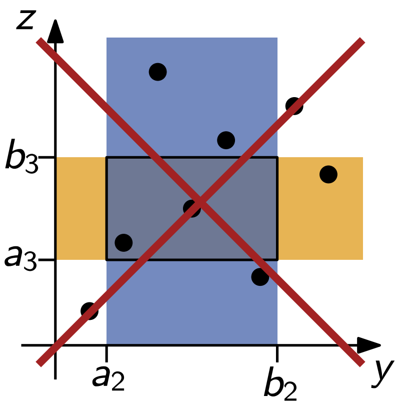


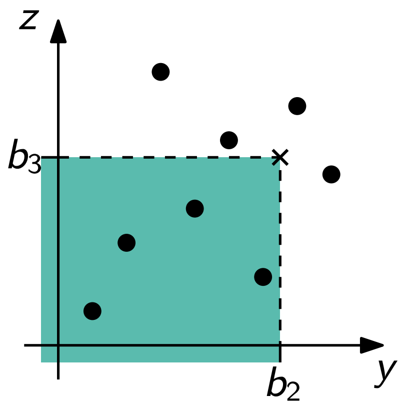
Halbe 2D-Bereichsanfragen

Halbe Bereichsanfragen sind halb so schwer

- Ziel: baue Datenstruktur, die alle Punkte in $(-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$ findet (statt $[a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$)

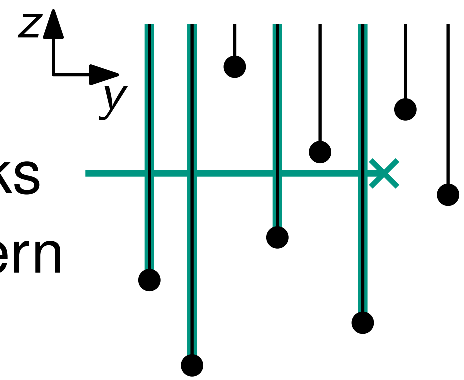
Ziel im Folgenden:
reduziere im 2D-Fall $\log n + \log n$ auf $\log n$
(einmal nach z suchen)





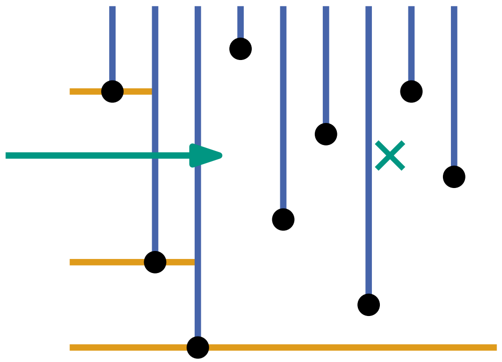
Alternative Sichtweise

- schieße Strahlen von den Punkten nach oben
- Strahl von $\langle b_2, b_3 \rangle$ nach links
- kreuzende Strahlen liefern gewünschte Punkte



Finde die kreuzenden Strahlen

- sammle die kreuzenden Strahlen von links auf
- pro Schritt: eine Suche in z-Richtung

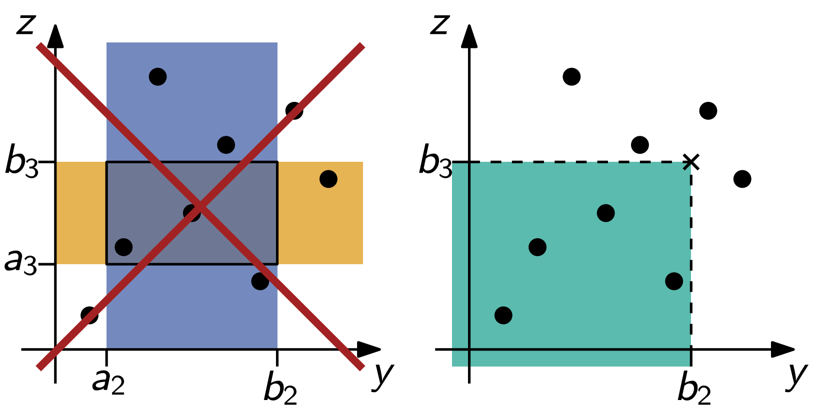


Halbe 2D-Bereichsanfragen

Halbe Bereichsanfragen sind halb so schwer

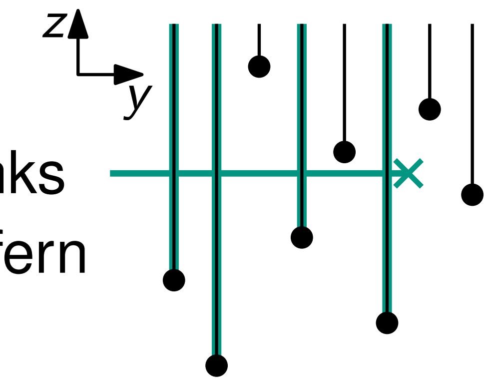
- Ziel: baue Datenstruktur, die alle Punkte in $(-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$ findet (statt $[a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$)

Ziel im Folgenden:
reduziere im 2D-Fall $\log n + \log n$ auf $\log n$
(einmal nach z suchen)



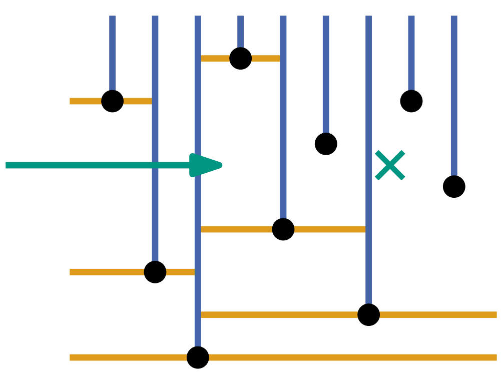
Alternative Sichtweise

- schieße Strahlen von den Punkten nach oben
- Strahl von $\langle b_2, b_3 \rangle$ nach links
- kreuzende Strahlen liefern gewünschte Punkte



Finde die kreuzenden Strahlen

- sammle die kreuzenden Strahlen von links auf
- pro Schritt: eine Suche in z-Richtung

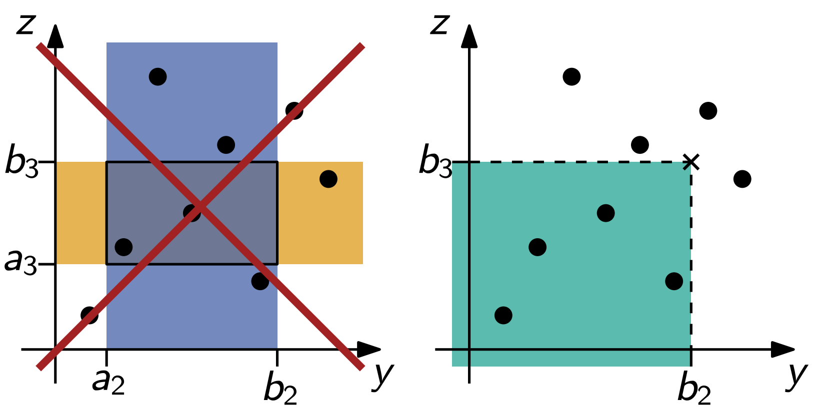


Halbe 2D-Bereichsanfragen

Halbe Bereichsanfragen sind halb so schwer

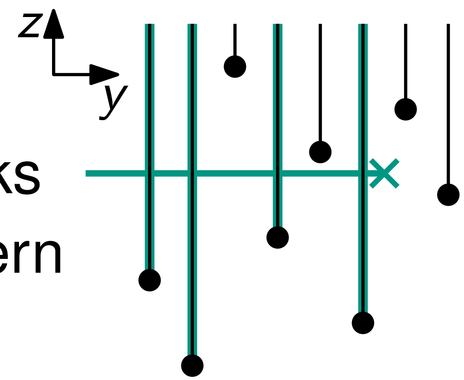
- Ziel: baue Datenstruktur, die alle Punkte in $(-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$ findet (statt $[a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$)

Ziel im Folgenden:
reduziere im 2D-Fall $\log n + \log n$ auf $\log n$
(einmal nach z suchen)



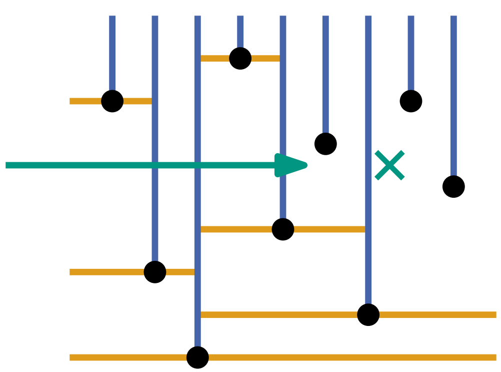
Alternative Sichtweise

- schieße Strahlen von den Punkten nach oben
- Strahl von $\langle b_2, b_3 \rangle$ nach links
- kreuzende Strahlen liefern gewünschte Punkte



Finde die kreuzenden Strahlen

- sammle die kreuzenden Strahlen von links auf
- pro Schritt: eine Suche in z-Richtung

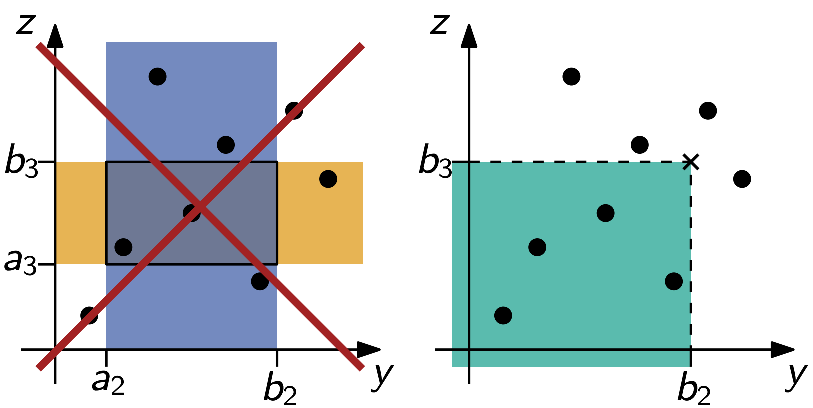


Halbe 2D-Bereichsanfragen

Halbe Bereichsanfragen sind halb so schwer

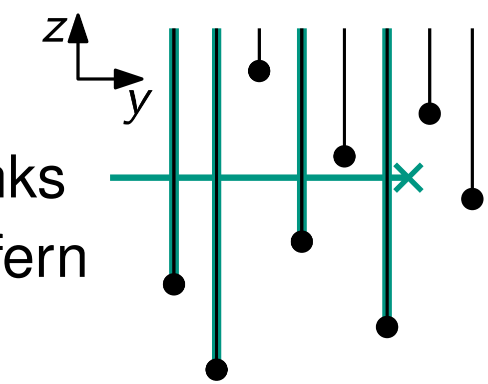
- Ziel: baue Datenstruktur, die alle Punkte in $(-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$ findet (statt $[a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$)

Ziel im Folgenden:
reduziere im 2D-Fall $\log n + \log n$ auf $\log n$
(einmal nach z suchen)



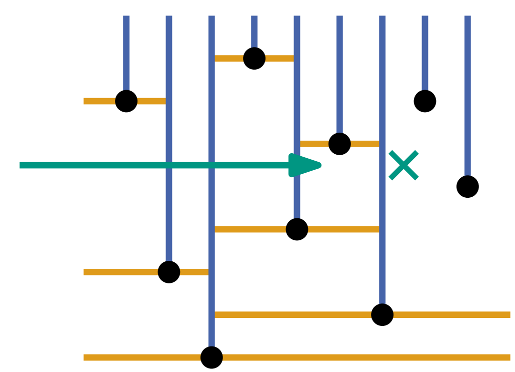
Alternative Sichtweise

- schieße Strahlen von den Punkten nach oben
- Strahl von $\langle b_2, b_3 \rangle$ nach links
- kreuzende Strahlen liefern gewünschte Punkte



Finde die kreuzenden Strahlen

- sammle die kreuzenden Strahlen von links auf
- pro Schritt: eine Suche in z-Richtung

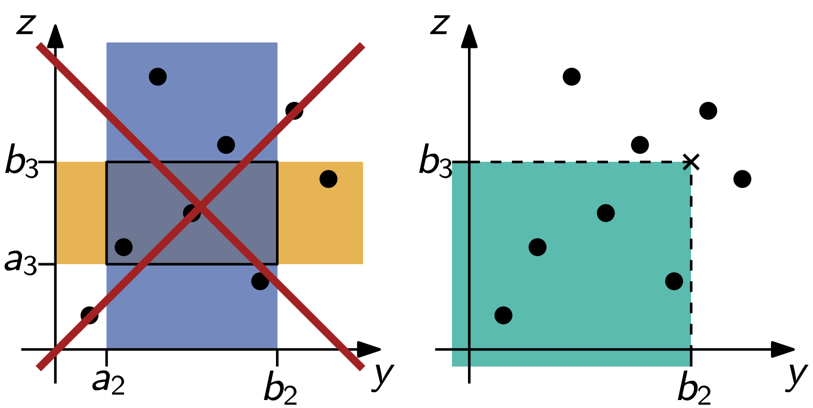


Halbe 2D-Bereichsanfragen

Halbe Bereichsanfragen sind halb so schwer

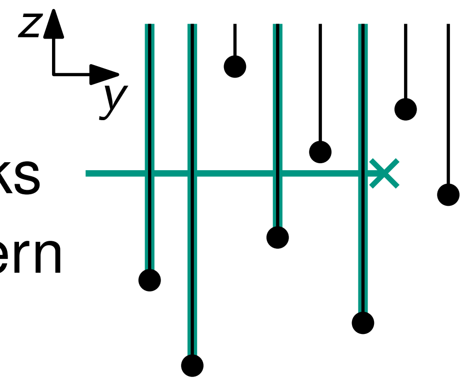
- Ziel: baue Datenstruktur, die alle Punkte in $(-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$ findet (statt $[a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$)

Ziel im Folgenden:
reduziere im 2D-Fall $\log n + \log n$ auf $\log n$
(einmal nach z suchen)



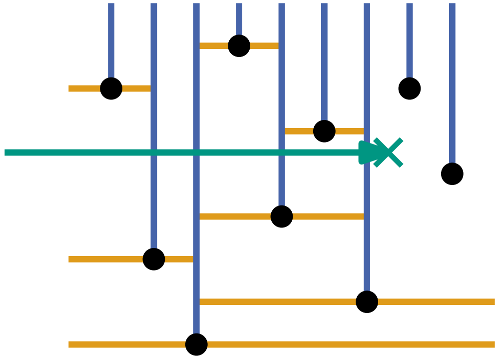
Alternative Sichtweise

- schieße Strahlen von den Punkten nach oben
- Strahl von $\langle b_2, b_3 \rangle$ nach links
- kreuzende Strahlen liefern gewünschte Punkte



Finde die kreuzenden Strahlen

- sammle die kreuzenden Strahlen von links auf
- pro Schritt: eine Suche in z-Richtung

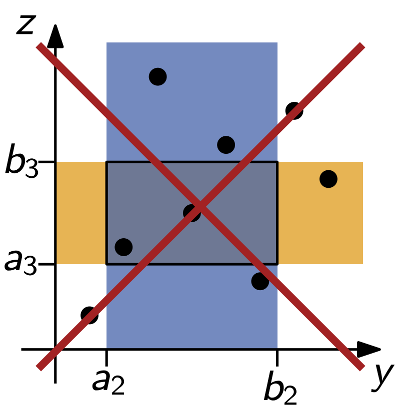


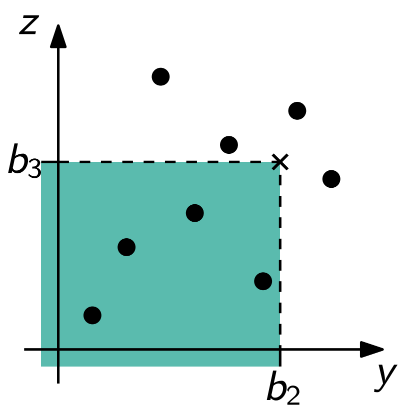
Halbe 2D-Bereichsanfragen

Halbe Bereichsanfragen sind halb so schwer

- Ziel: baue Datenstruktur, die alle Punkte in $(-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$ findet (statt $[a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$)

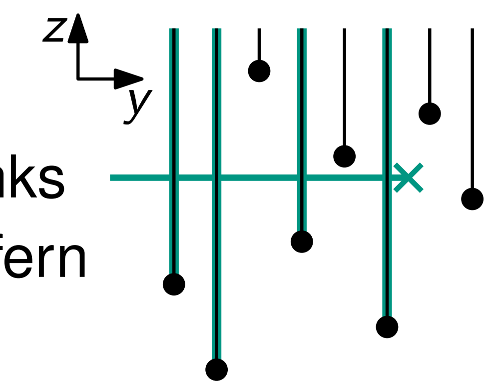
Ziel im Folgenden:
reduziere im 2D-Fall $\log n + \log n$ auf $\log n$
(einmal nach z suchen)





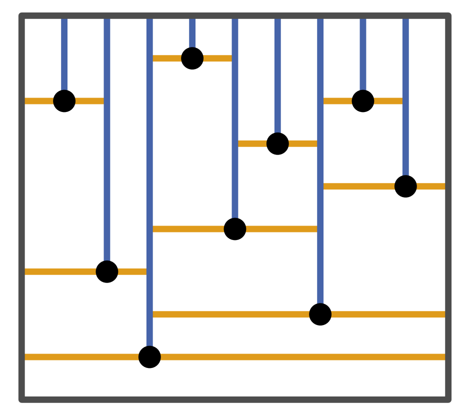
Alternative Sichtweise

- schieße Strahlen von den Punkten nach oben
- Strahl von $\langle b_2, b_3 \rangle$ nach links
- kreuzende Strahlen liefern gewünschte Punkte



Finde die kreuzenden Strahlen

- sammle die kreuzenden Strahlen von links auf
- pro Schritt: eine Suche in z-Richtung
- wir laufen quasi von Zelle zu Zelle

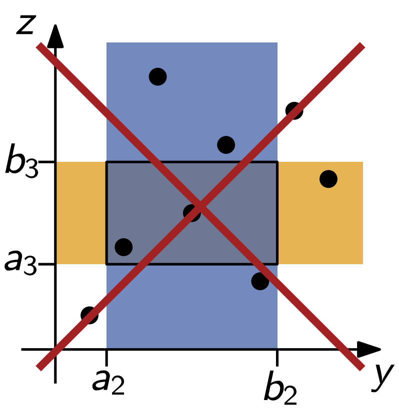


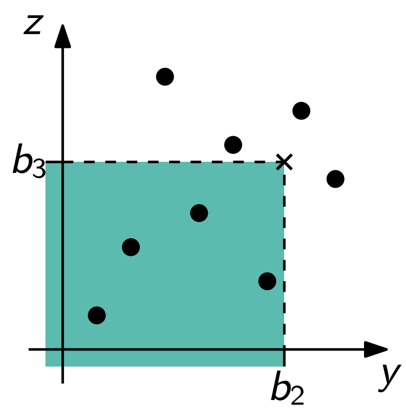
Halbe 2D-Bereichsanfragen

Halbe Bereichsanfragen sind halb so schwer

- Ziel: baue Datenstruktur, die alle Punkte in $(-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$ findet (statt $[a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$)

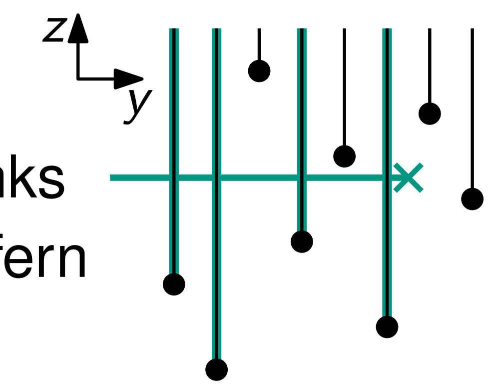
Ziel im Folgenden:
reduziere im 2D-Fall $\log n + \log n$ auf $\log n$
(einmal nach z suchen)





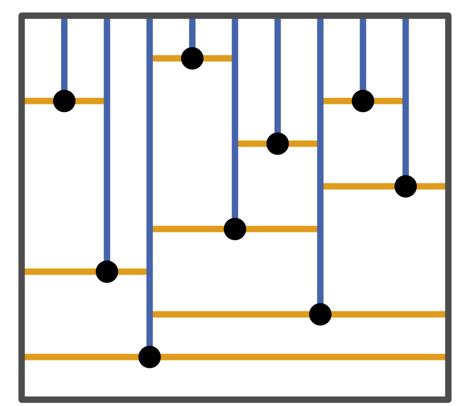
Alternative Sichtweise

- schieße Strahlen von den Punkten nach oben
- Strahl von $\langle b_2, b_3 \rangle$ nach links
- kreuzende Strahlen liefern gewünschte Punkte



Finde die kreuzenden Strahlen

- sammle die kreuzenden Strahlen von links auf
- pro Schritt: eine Suche in z-Richtung
- wir laufen quasi von Zelle zu Zelle
- jede Zelle kennt die Zellen rechts von sich, sortiert nach z

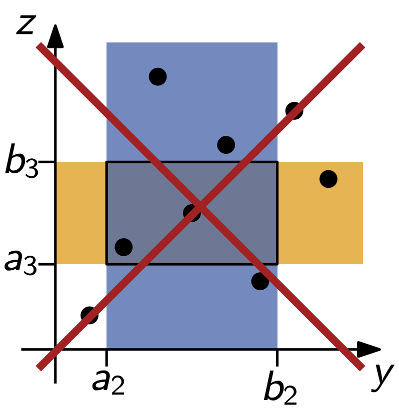


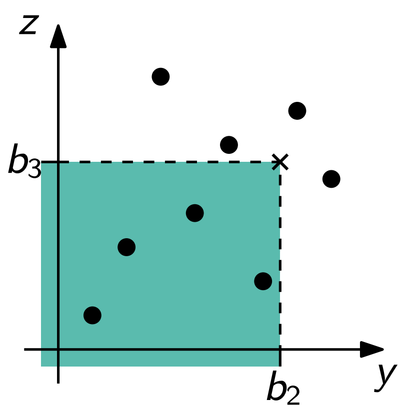
Halbe 2D-Bereichsanfragen

Halbe Bereichsanfragen sind halb so schwer

- Ziel: baue Datenstruktur, die alle Punkte in $(-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$ findet (statt $[a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$)

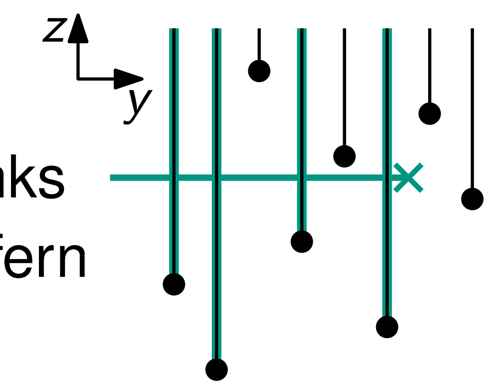
Ziel im Folgenden:
reduziere im 2D-Fall $\log n + \log n$ auf $\log n$
(einmal nach z suchen)





Alternative Sichtweise

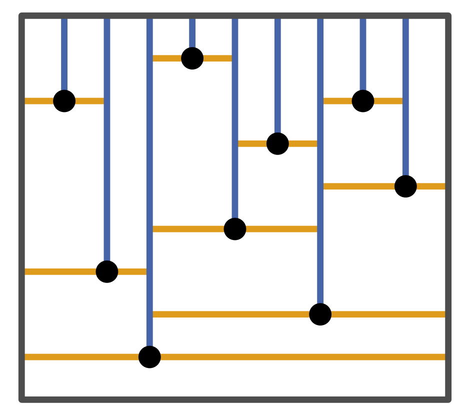
- schieße Strahlen von den Punkten nach oben
- Strahl von $\langle b_2, b_3 \rangle$ nach links
- kreuzende Strahlen liefern gewünschte Punkte



Finde die kreuzenden Strahlen

- sammle die kreuzenden Strahlen von links auf
- pro Schritt: eine Suche in z-Richtung
- wir laufen quasi von Zelle zu Zelle
- jede Zelle kennt die Zellen rechts von sich, sortiert nach z

$\Rightarrow O(k \log n)$, wenn wir jedes mal suchen

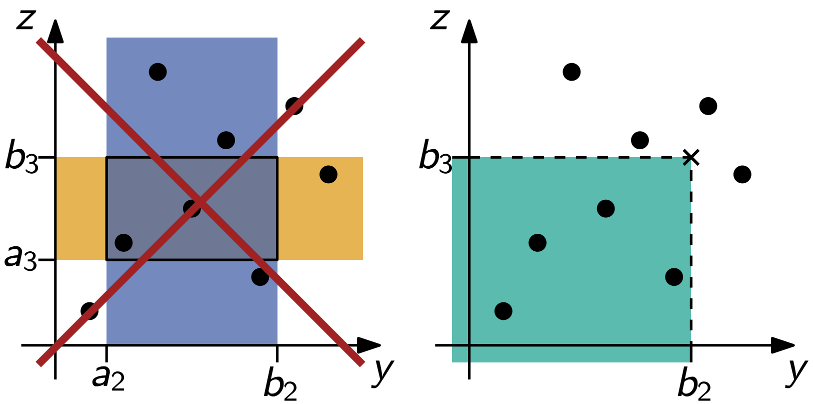


Halbe 2D-Bereichsanfragen

Halbe Bereichsanfragen sind halb so schwer

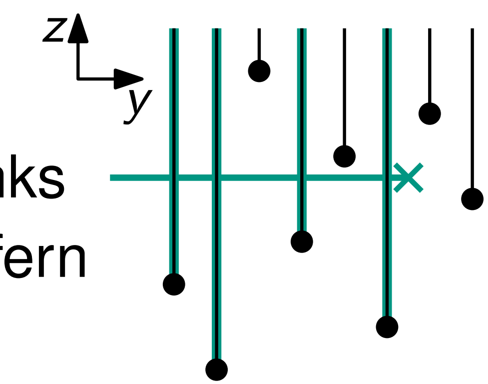
- Ziel: baue Datenstruktur, die alle Punkte in $(-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$ findet (statt $[a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$)

Ziel im Folgenden:
reduziere im 2D-Fall $\log n + \log n$ auf $\log n$
(einmal nach z suchen)



Alternative Sichtweise

- schieße Strahlen von den Punkten nach oben
- Strahl von $\langle b_2, b_3 \rangle$ nach links
- kreuzende Strahlen liefern gewünschte Punkte

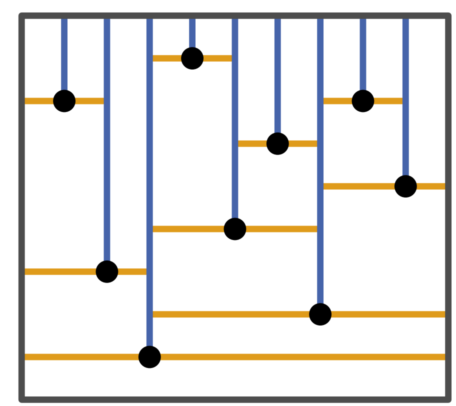


Finde die kreuzenden Strahlen

- sammle die kreuzenden Strahlen von links auf
- pro Schritt: eine Suche in z-Richtung
- wir laufen quasi von Zelle zu Zelle
- jede Zelle kennt die Zellen rechts von sich, sortiert nach z

$\Rightarrow O(k \log n)$, wenn wir jedes mal suchen

Schaffen wir $\log n + k$?

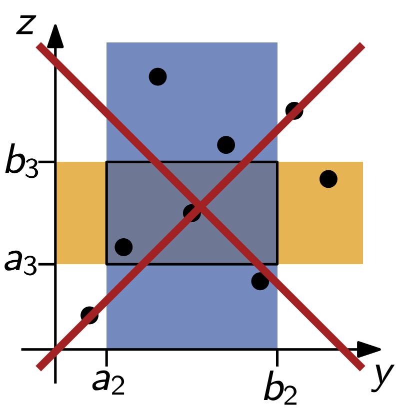


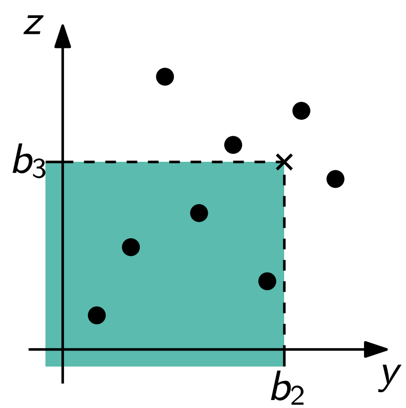
Halbe 2D-Bereichsanfragen

Halbe Bereichsanfragen sind halb so schwer

- Ziel: baue Datenstruktur, die alle Punkte in $(-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$ findet (statt $[a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$)

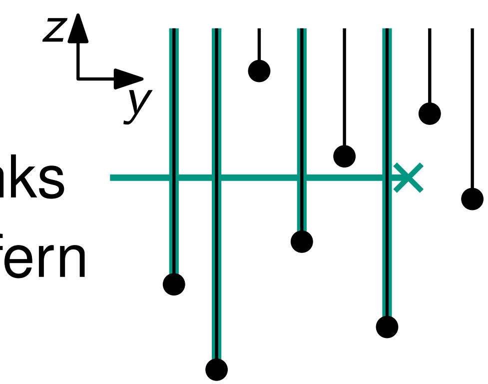
Ziel im Folgenden:
reduziere im 2D-Fall $\log n + \log n$ auf $\log n$ (einmal nach z suchen)





Alternative Sichtweise

- schieße Strahlen von den Punkten nach oben
- Strahl von $\langle b_2, b_3 \rangle$ nach links
- kreuzende Strahlen liefern gewünschte Punkte

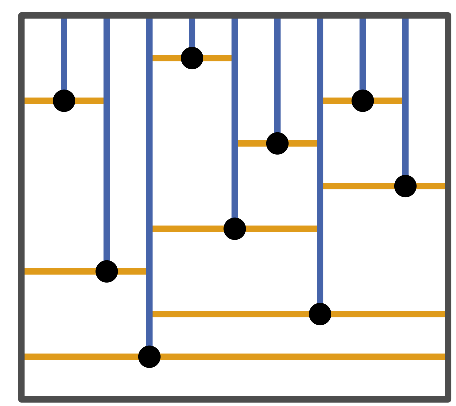


Finde die kreuzenden Strahlen

- sammle die kreuzenden Strahlen von links auf
- pro Schritt: eine Suche in z-Richtung
- wir laufen quasi von Zelle zu Zelle
- jede Zelle kennt die Zellen rechts von sich, sortiert nach z

$\Rightarrow O(k \log n)$, wenn wir jedes mal suchen

Schaffen wir $\log n + k$? **Fractional Cascading!**

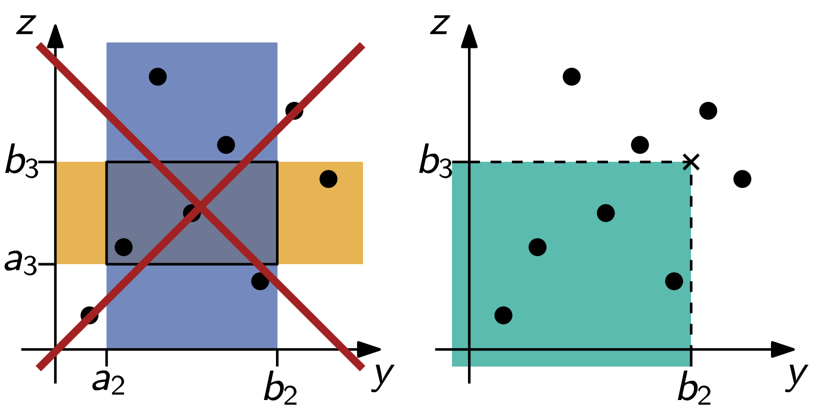


Halbe 2D-Bereichsanfragen

Halbe Bereichsanfragen sind halb so schwer

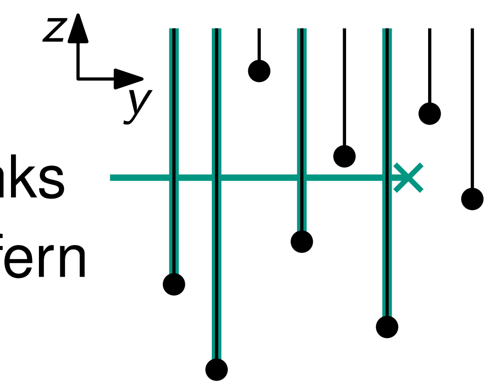
- Ziel: baue Datenstruktur, die alle Punkte in $(-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$ findet (statt $[a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$)

Ziel im Folgenden:
reduziere im 2D-Fall $\log n + \log n$ auf $\log n$
(einmal nach z suchen)



Alternative Sichtweise

- schieße Strahlen von den Punkten nach oben
- Strahl von $\langle b_2, b_3 \rangle$ nach links
- kreuzende Strahlen liefern gewünschte Punkte

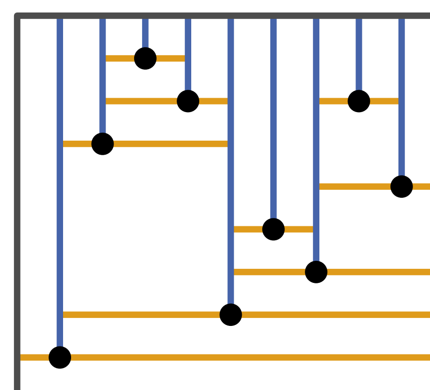


Finde die kreuzenden Strahlen

- sammle die kreuzenden Strahlen von links auf
- pro Schritt: eine Suche in z-Richtung
- wir laufen quasi von Zelle zu Zelle
- jede Zelle kennt die Zellen rechts von sich, sortiert nach z

$\Rightarrow O(k \log n)$, wenn wir jedes mal suchen

Schaffen wir $\log n + k$? **Fractional Cascading! Beispiel:**

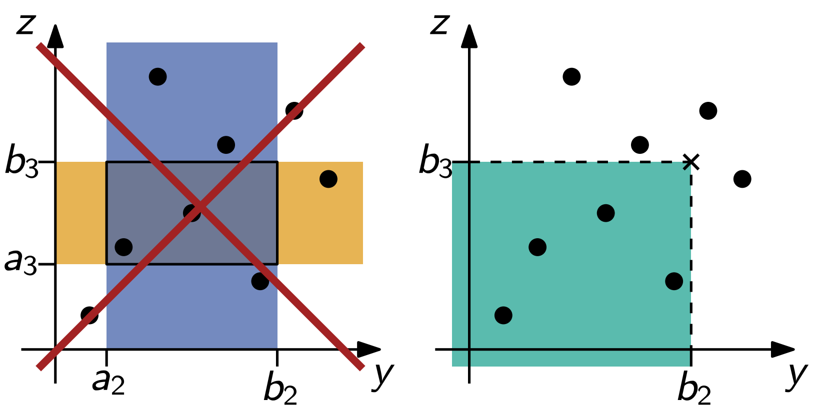


Halbe 2D-Bereichsanfragen

Halbe Bereichsanfragen sind halb so schwer

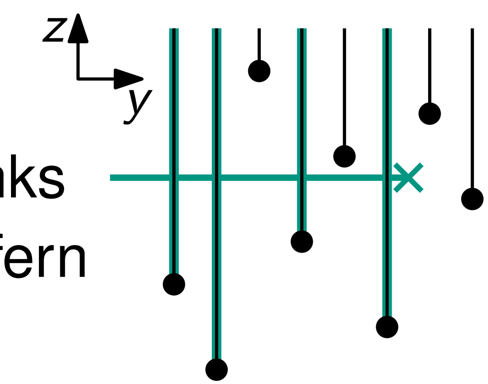
- Ziel: baue Datenstruktur, die alle Punkte in $(-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$ findet (statt $[a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$)

Ziel im Folgenden:
reduziere im 2D-Fall $\log n + \log n$ auf $\log n$
(einmal nach z suchen)



Alternative Sichtweise

- schieße Strahlen von den Punkten nach oben
- Strahl von $\langle b_2, b_3 \rangle$ nach links
- kreuzende Strahlen liefern gewünschte Punkte

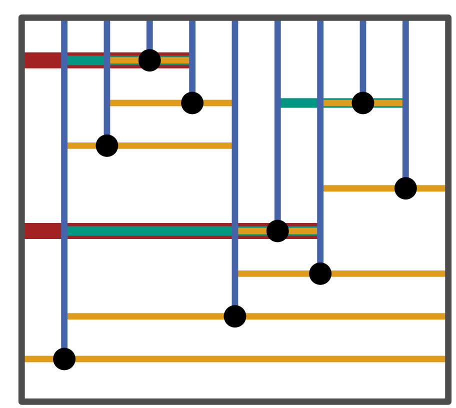


Finde die kreuzenden Strahlen

- sammle die kreuzenden Strahlen von links auf
- pro Schritt: eine Suche in z-Richtung
- wir laufen quasi von Zelle zu Zelle
- jede Zelle kennt die Zellen rechts von sich, sortiert nach z

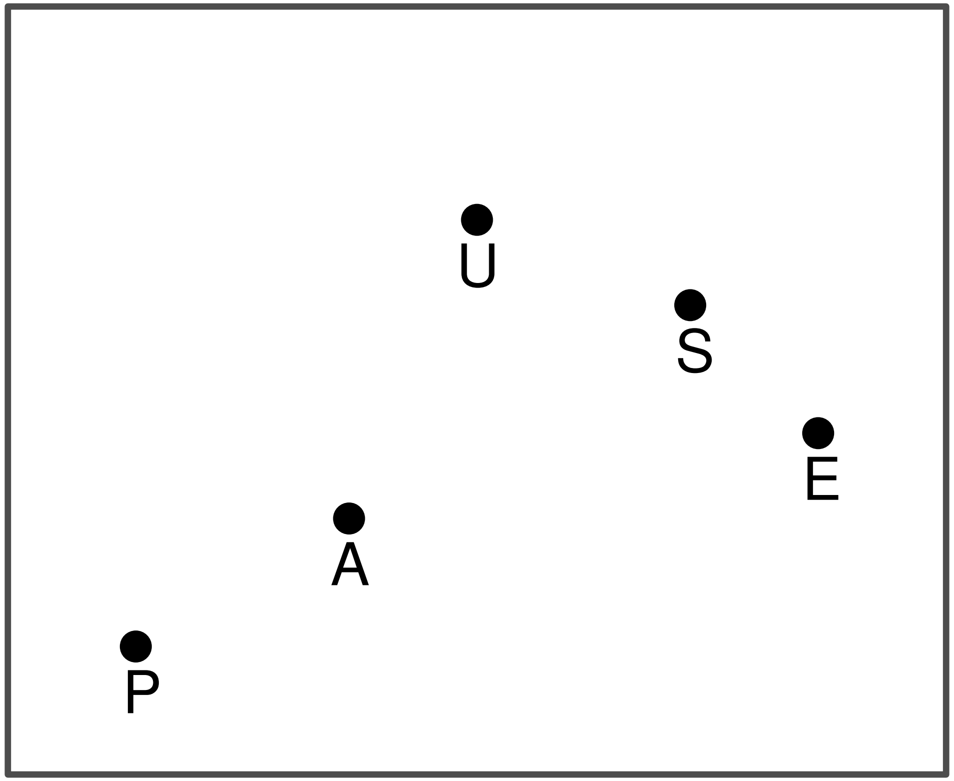
$\Rightarrow O(k \log n)$, wenn wir jedes mal suchen

Schaffen wir $\log n + k$? **Fractional Cascading! Beispiel:**



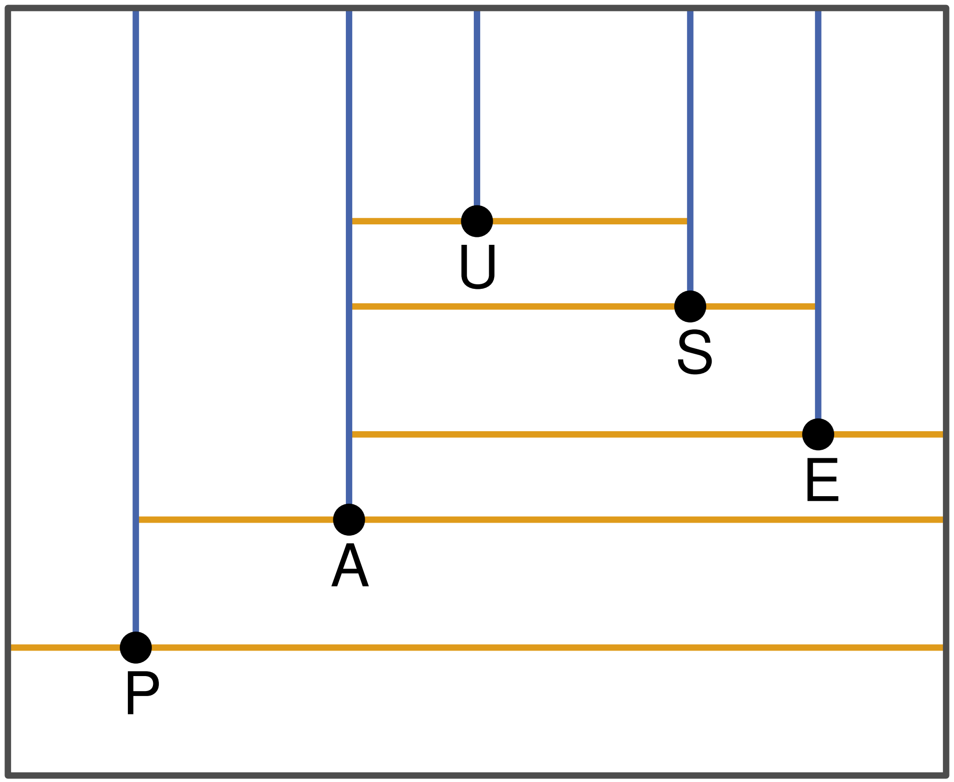
Zähle die Zellen

Wie viele Zellen erhalten wir (mit und ohne fractional cascading)?



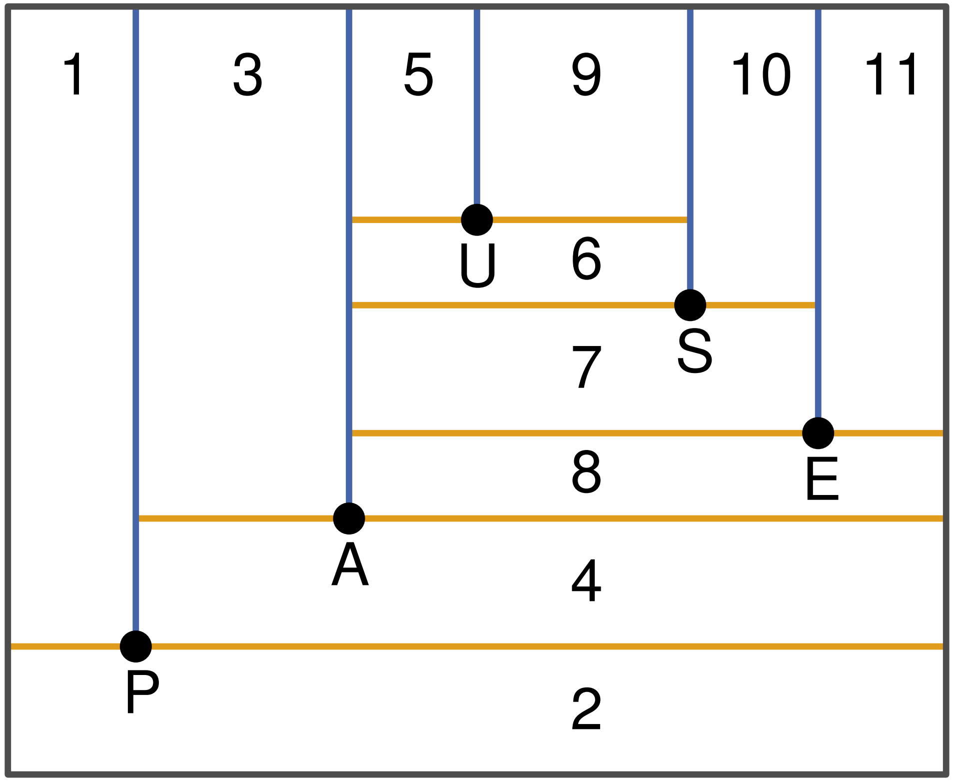
Zähle die Zellen

Wie viele Zellen erhalten wir (mit und ohne fractional cascading)?



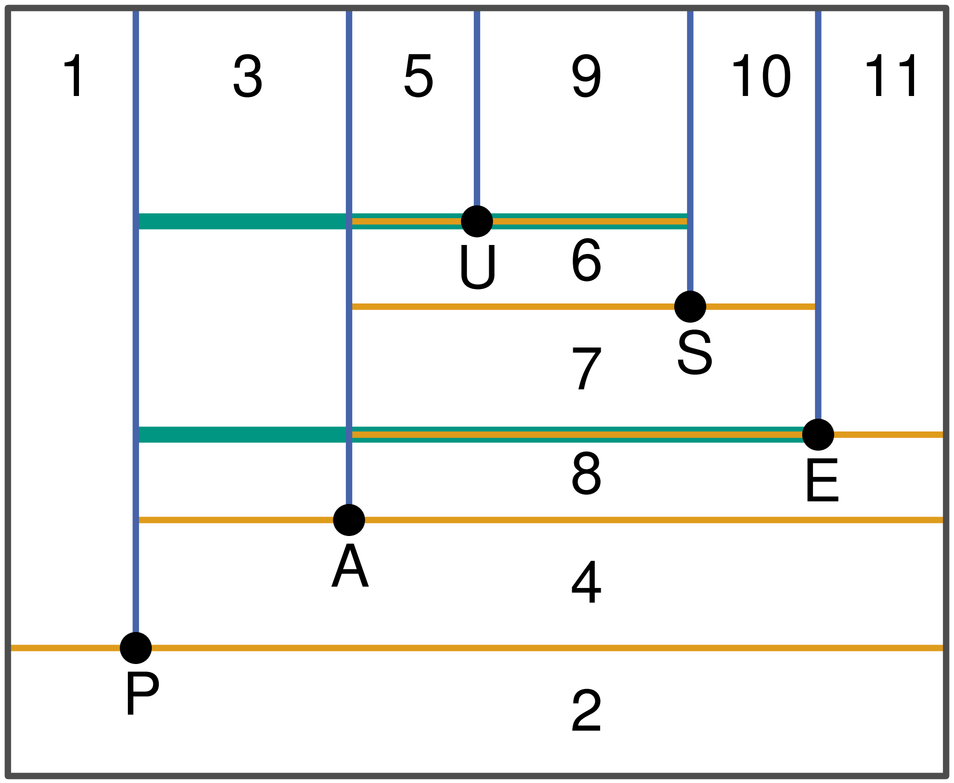
Zähle die Zellen

Wie viele Zellen erhalten wir (mit und ohne fractional cascading)?



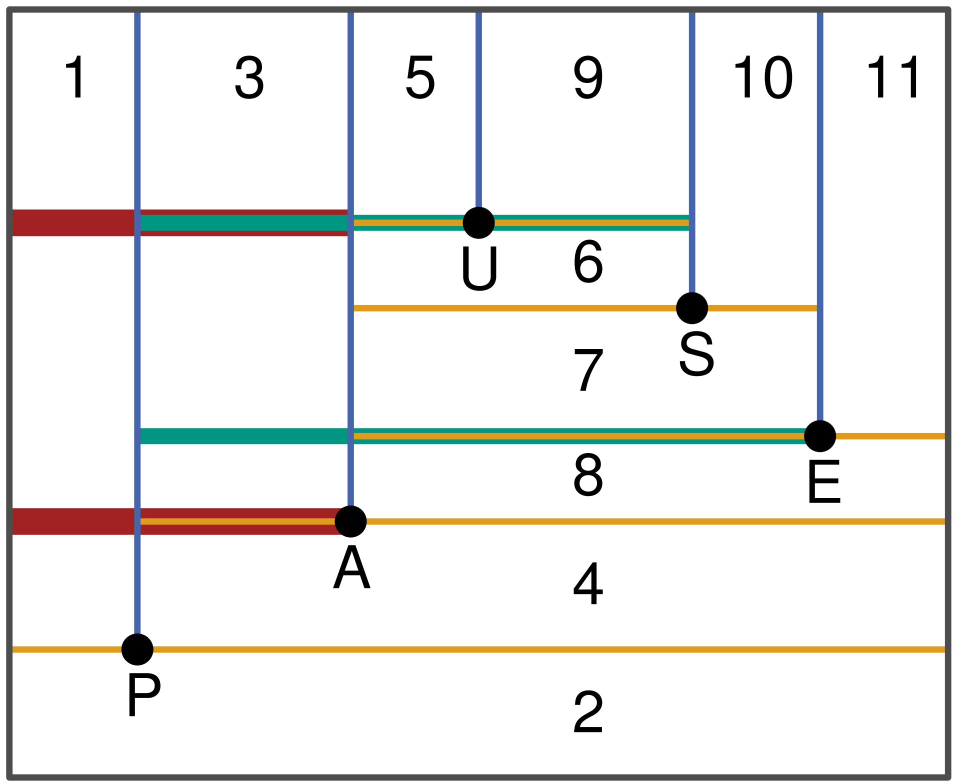
Zähle die Zellen

Wie viele Zellen erhalten wir (mit und ohne fractional cascading)?



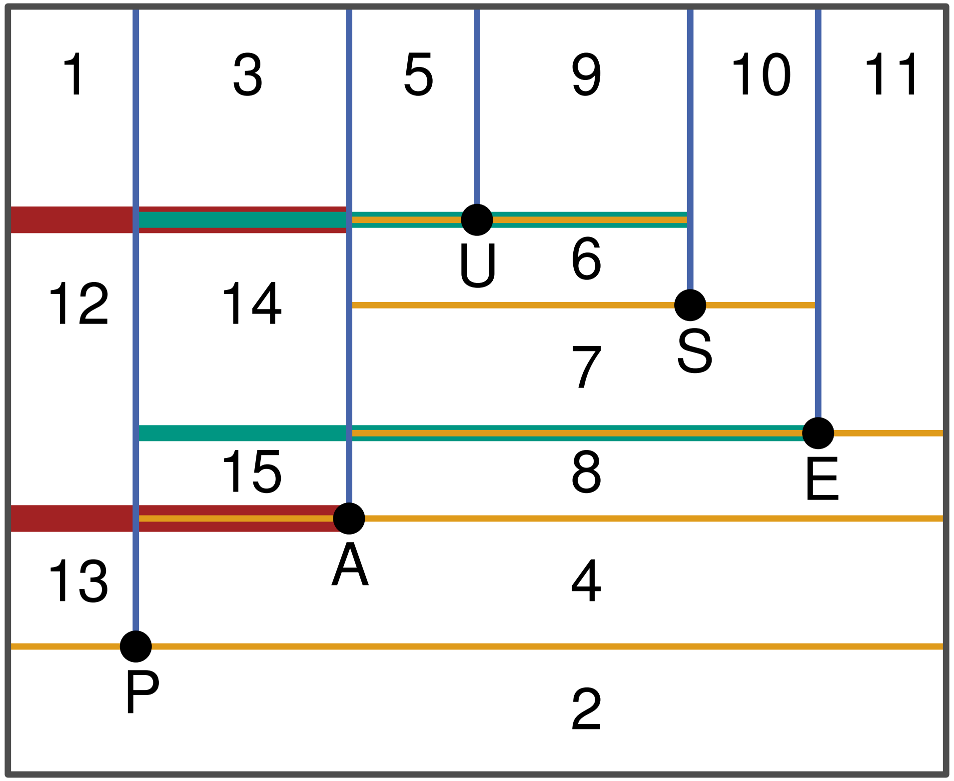
Zähle die Zellen

Wie viele Zellen erhalten wir (mit und ohne fractional cascading)?



Zähle die Zellen

Wie viele Zellen erhalten wir (mit und ohne fractional cascading)?



Halbe 3D-Bereichsanfragen

Gerade gesehen

- Anfragen der Form $(-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$ in $O(\underbrace{\log n}_{\text{eine Suche in } z\text{-Richtung}} + \overbrace{k}^{\text{Ausgabegröße}})$ **(DS1)**

Halbe 3D-Bereichsanfragen

Gerade gesehen

Ausgabegröße

- Anfragen der Form $(-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$ in $O(\log n + k)$ **(DS1)**

eine Suche in z-Richtung

Jetzt

- Anfragen der Form $[a_1, b_1] \times (-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$

Halbe 3D-Bereichsanfragen

Gerade gesehen

Ausgabegröße

- Anfragen der Form $(-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$ in $O(\log n + k)$ **(DS1)**

eine Suche in z-Richtung

Jetzt

- Anfragen der Form $[a_1, b_1] \times (-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$

Wir wissen schon, wie das geht. . .

Halbe 3D-Bereichsanfragen

Gerade gesehen

Ausgabegröße

- Anfragen der Form $(-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$ in $O(\log n + k)$ **(DS1)**

eine Suche in z-Richtung

Jetzt

- Anfragen der Form $[a_1, b_1] \times (-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$

Wir wissen schon, wie das geht...

- binärer Suchbaum für x-Richtung

Halbe 3D-Bereichsanfragen

Gerade gesehen

- Anfragen der Form $(-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$ in $O(\underbrace{\log n}_{\text{eine Suche in } z\text{-Richtung}} + \overbrace{k}^{\text{Ausgabegröße}})$ **(DS1)**

Jetzt

- Anfragen der Form $[a_1, b_1] \times (-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$

Wir wissen schon, wie das geht...

- binärer Suchbaum für x-Richtung
- jeder Knoten speichert eine **(DS1)** mit den entsprechenden Punkten

Halbe 3D-Bereichsanfragen

Gerade gesehen

- Anfragen der Form $(-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$ in $O(\log n + k)$ **(DS1)**

  Ausgabegröße

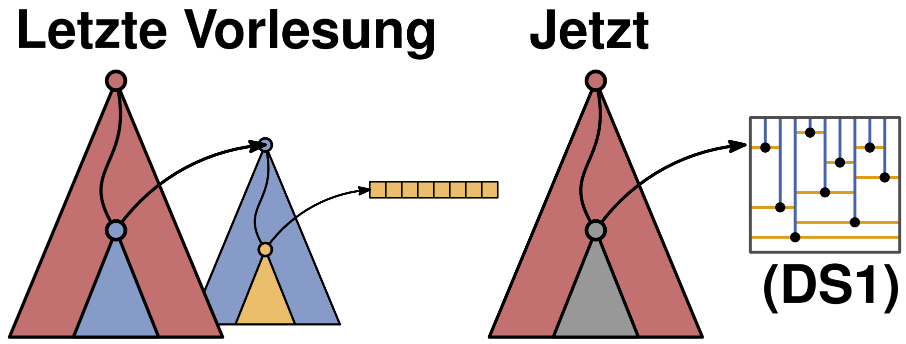
  eine Suche in z-Richtung

Jetzt

- Anfragen der Form $[a_1, b_1] \times (-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$

Wir wissen schon, wie das geht…

- binärer Suchbaum für x-Richtung
- jeder Knoten speichert eine **(DS1)** mit den entsprechenden Punkten



Halbe 3D-Bereichsanfragen

Gerade gesehen

Ausgabegröße

- Anfragen der Form $(-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$ in $O(\log n + k)$ **(DS1)**

eine Suche in z-Richtung

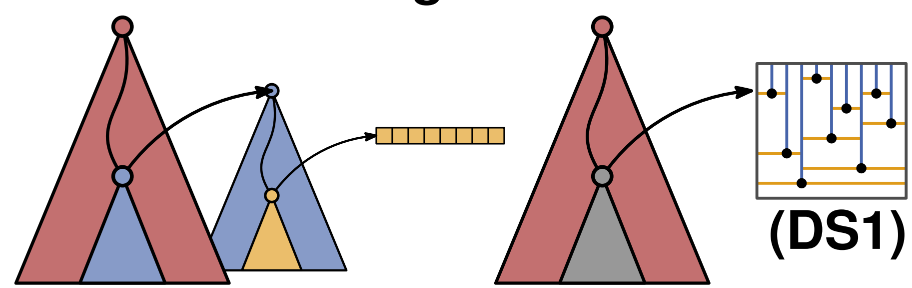
Jetzt

- Anfragen der Form $[a_1, b_1] \times (-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$

Wir wissen schon, wie das geht...

- binärer Suchbaum für x-Richtung
- jeder Knoten speichert eine **(DS1)** mit den entsprechenden Punkten

Letzte Vorlesung **Jetzt**



Muss ich jetzt nicht in $O(\log n)$ vielen (DS1) suchen?

Halbe 3D-Bereichsanfragen

Gerade gesehen

Ausgabegröße

- Anfragen der Form $(-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$ in $O(\log n + k)$ **(DS1)**

eine Suche in z-Richtung

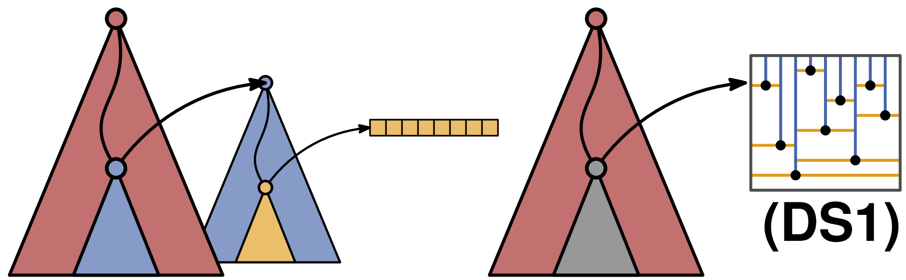
Jetzt

- Anfragen der Form $[a_1, b_1] \times (-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$

Wir wissen schon, wie das geht...

- binärer Suchbaum für x-Richtung
- jeder Knoten speichert eine **(DS1)** mit den entsprechenden Punkten

Letzte Vorlesung **Jetzt**



Muss ich jetzt nicht in $O(\log n)$ vielen (DS1) suchen?

- ja, aber...

Halbe 3D-Bereichsanfragen

Gerade gesehen

- Anfragen der Form $(-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$ in $O(\underbrace{\log n}_{\text{eine Suche in } z\text{-Richtung}} + \overbrace{k}^{\text{Ausgabegröße}})$ **(DS1)**

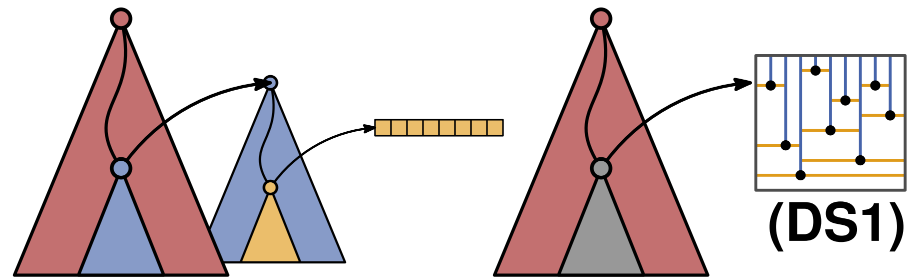
Jetzt

- Anfragen der Form $[a_1, b_1] \times (-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$

Wir wissen schon, wie das geht...

- binärer Suchbaum für x-Richtung
- jeder Knoten speichert eine **(DS1)** mit den entsprechenden Punkten

Letzte Vorlesung **Jetzt**



Muss ich jetzt nicht in $O(\log n)$ vielen (DS1) suchen?

- ja, aber... **Fractional Cascading!**

Halbe 3D-Bereichsanfragen

Gerade gesehen

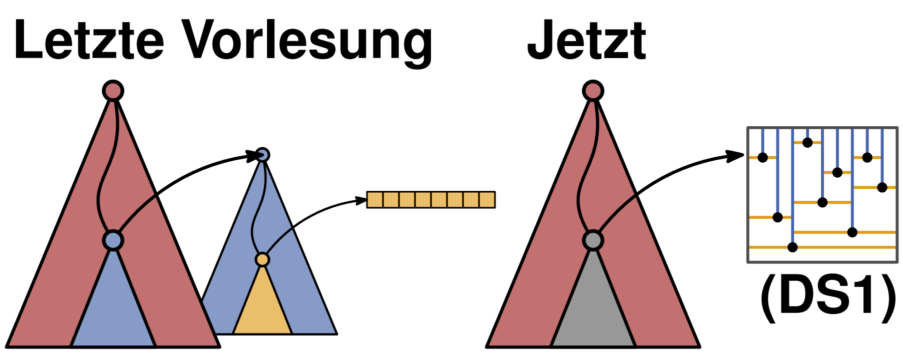
- Anfragen der Form $(-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$ in $O(\underbrace{\log n}_{\text{eine Suche in } z\text{-Richtung}} + \overbrace{k}^{\text{Ausgabegröße}})$ **(DS1)**

Jetzt

- Anfragen der Form $[a_1, b_1] \times (-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$

Wir wissen schon, wie das geht...

- binärer Suchbaum für x-Richtung
- jeder Knoten speichert eine **(DS1)** mit den entsprechenden Punkten



Muss ich jetzt nicht in $O(\log n)$ vielen (DS1) suchen?

- ja, aber... **Fractional Cascading!**
- suche einmal in z-Richtung in der x-Wurzel
- verfolge die z-Position beim runterlaufen im x-Baum

Halbe 3D-Bereichsanfragen

Gerade gesehen

- Anfragen der Form $(-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$ in $O(\log n + k)$ **(DS1)**

  Ausgabegröße

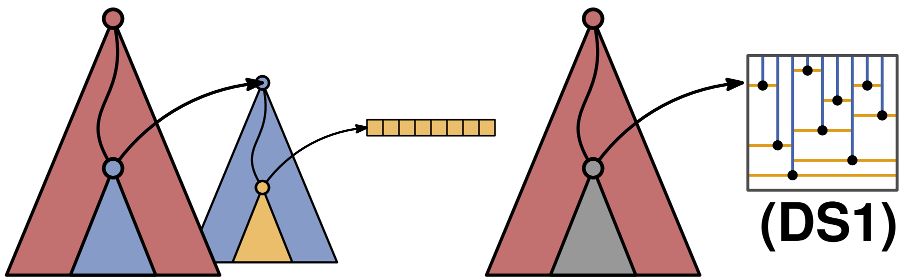
  eine Suche in z-Richtung

Jetzt

- Anfragen der Form $[a_1, b_1] \times (-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$

Wir wissen schon, wie das geht. . .

- binärer Suchbaum für x-Richtung
- jeder Knoten speichert eine **(DS1)** mit den entsprechenden Punkten



Muss ich jetzt nicht in $O(\log n)$ vielen (DS1) suchen?

- ja, aber. . . **Fractional Cascading!**
- suche einmal in z-Richtung in der x-Wurzel
- verfolge die z-Position beim runterlaufen im x-Baum
- in **(DS1)** spart man sich die erste Suche $\Rightarrow$ Gesamtlaufzeit $O(\log n + k)$

Zwei Halbe ergeben ein Ganzes

Lemma **(DS2)**
Für n Punkte in $\mathbb{R}^3$ können $[a_1, b_1] \times (-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$-Anfragen nach $O(n \log n)$ Vorber. mit $O(n \log n)$ Speicher in $O(\log n + k)$ Zeit beantworten.

Zwei Halbe ergeben ein Ganzes

Karlsruher Institut für Technologie

Lemma **(DS2)**
Für n Punkte in $\mathbb{R}^3$ können $[a_1, b_1] \times (-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$-Anfragen nach $O(n \log n)$ Vorber. mit $O(n \log n)$ Speicher in $O(\log n + k)$ Zeit beantworten.

Vorgehen im Folgenden

- nutze **(DS2)** als black box

Zwei Halbe ergeben ein Ganzes

Lemma **(DS2)**
Für n Punkte in $\mathbb{R}^3$ können $[a_1, b_1] \times (-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$-Anfragen nach $O(n \log n)$ Vorber. mit $O(n \log n)$ Speicher in $O(\log n + k)$ Zeit beantworten.

Vorgehen im Folgenden

- nutze **(DS2)** als black box
- finde Transformation, die aus $(-\infty, b_2]$ ein $[a_2, b_2]$ macht
- nutze dabei y-invertierte Variante von **(DS2)** für Anfragen der Form $[a_2, \infty)$

Zwei Halbe ergeben ein Ganzes

Lemma **(DS2)**
Für n Punkte in $\mathbb{R}^3$ können $[a_1, b_1] \times (-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$-Anfragen nach $O(n \log n)$ Vorber. mit $O(n \log n)$ Speicher in $O(\log n + k)$ Zeit beantworten.

Vorgehen im Folgenden

- nutze **(DS2)** als black box
- finde Transformation, die aus $(-\infty, b_2]$ ein $[a_2, b_2]$ macht
- nutze dabei y-invertierte Variante von **(DS2)** für Anfragen der Form $[a_2, \infty)$

Können wir nicht einfach den Schnitt der Anfragen berechnen?
$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] = [a_1, b_1] \times (-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3] \cap [a_1, b_1] \times [a_2, \infty) \times [a_3, \infty)$

Zwei Halbe ergeben ein Ganzes

Lemma **(DS2)**
Für n Punkte in $\mathbb{R}^3$ können $[a_1, b_1] \times (-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$-Anfragen nach $O(n \log n)$ Vorber. mit $O(n \log n)$ Speicher in $O(\log n + k)$ Zeit beantworten.

Vorgehen im Folgenden

- nutze **(DS2)** als black box
- finde Transformation, die aus $(-\infty, b_2]$ ein $[a_2, b_2]$ macht
- nutze dabei y-invertierte Variante von **(DS2)** für Anfragen der Form $[a_2, \infty)$

Können wir nicht einfach den Schnitt der Anfragen berechnen?
$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] = [a_1, b_1] \times (-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3] \cap [a_1, b_1] \times [a_2, \infty) \times [a_3, \infty)$

Lemma **(DS3)**
Für n Punkte in $\mathbb{R}^3$ können wir $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times (-\infty, b_3]$-Anfragen nach $O(n \log^2 n)$ Vorber. mit $O(n \log^2 n)$ Speicher in $O(\log n + k)$ Zeit beantworten.

Zwei Halbe ergeben ein Ganzes

Lemma **(DS2)**
Für n Punkte in $\mathbb{R}^3$ können $[a_1, b_1] \times (-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$-Anfragen nach $O(n \log n)$ Vorber. mit $O(n \log n)$ Speicher in $O(\log n + k)$ Zeit beantworten.

Vorgehen im Folgenden

- nutze **(DS2)** als black box
- finde Transformation, die aus $(-\infty, b_2]$ ein $[a_2, b_2]$ macht
- nutze dabei y-invertierte Variante von **(DS2)** für Anfragen der Form $[a_2, \infty)$

Können wir nicht einfach den Schnitt der Anfragen berechnen?
$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] = [a_1, b_1] \times (-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3] \cap [a_1, b_1] \times [a_2, \infty) \times [a_3, \infty)$

Lemma **(DS3)**
Für n Punkte in $\mathbb{R}^3$ können wir $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times (-\infty, b_3]$-Anfragen nach $O(n \log^2 n)$ Vorber. mit $O(n \log^2 n)$ Speicher in $O(\log n + k)$ Zeit beantworten.

Theorem **(DS4)**
Für n Punkte in $\mathbb{R}^3$ können wir $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$-Anfragen nach $O(n \log^3 n)$ Vorber. mit $O(n \log^3 n)$ Speicher in $O(\log n + k)$ Zeit beantworten.

Intervall in y-Richtung

Vereinfachte Sichtweise

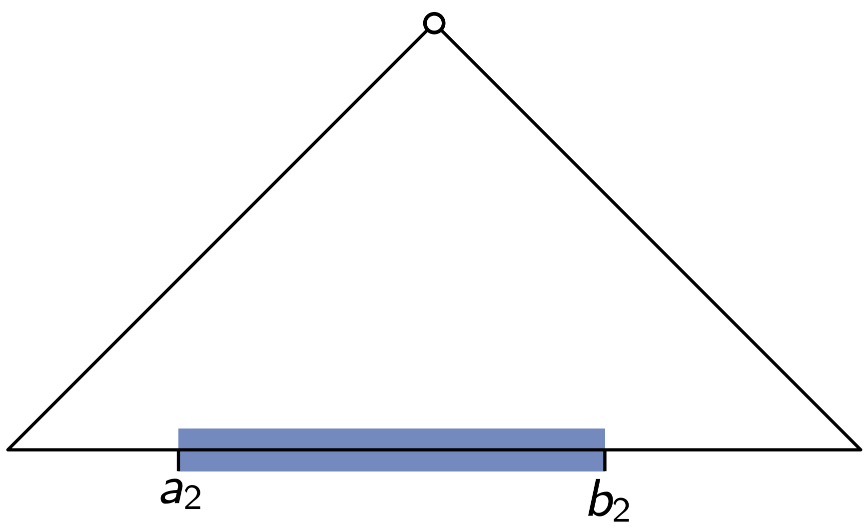
- ignoriere x- und z-Richtung
- **(DS2)** erlaubt uns Anfragen der Form $[a_2, \infty)$ und $(-\infty, b_2]$
- Ziel: baue neue Datenstruktur, die Anfragen der Form $[a_2, b_2]$ erlaubt

Intervall in y-Richtung

Vereinfachte Sichtweise

- ignoriere x- und z-Richtung
- **(DS2)** erlaubt uns Anfragen der Form $[a_2, \infty)$ und $(-\infty, b_2]$
- Ziel: baue neue Datenstruktur, die Anfragen der Form $[a_2, b_2]$ erlaubt

Binärer Suchbaum in y-Richtung

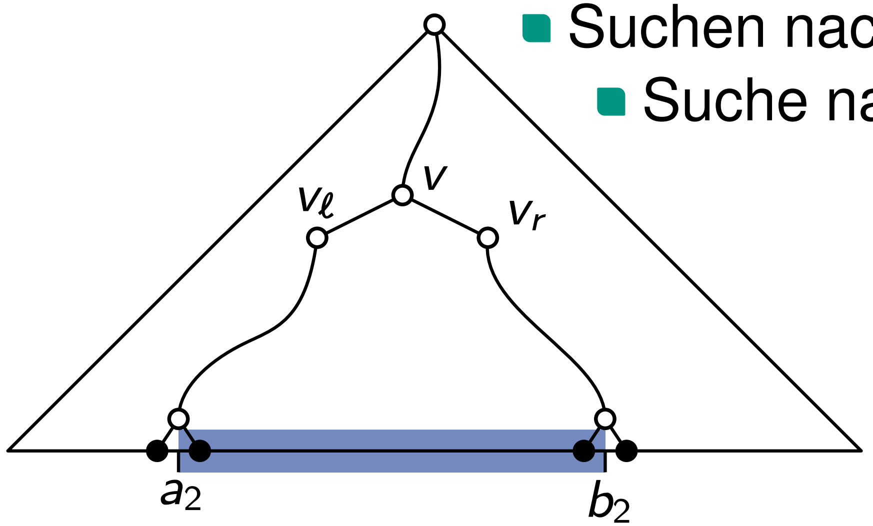


Intervall in y-Richtung

Vereinfachte Sichtweise

- ignoriere x- und z-Richtung
- **(DS2)** erlaubt uns Anfragen der Form $[a_2, \infty)$ und $(-\infty, b_2]$
- Ziel: baue neue Datenstruktur, die Anfragen der Form $[a_2, b_2]$ erlaubt

Binärer Suchbaum in y-Richtung



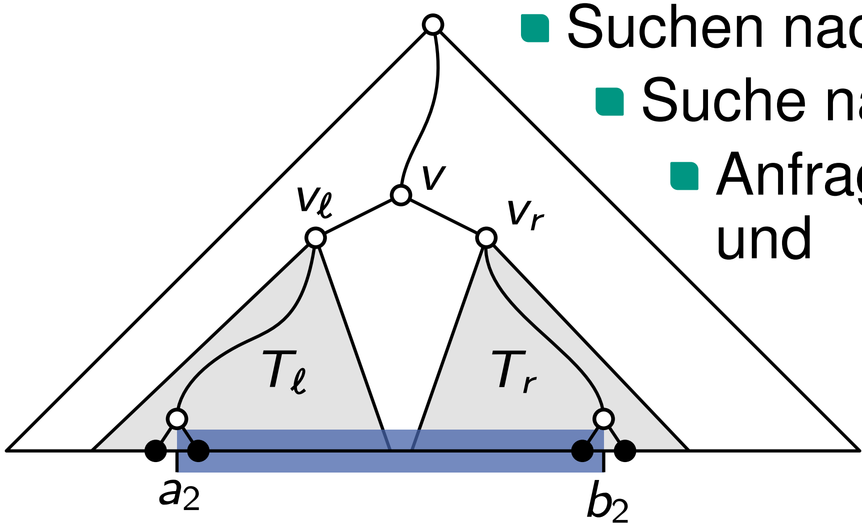
- Suchen nach a_2 und b_2 trennen sich an Knoten v
  - Suche nach a_2: $\rightarrow v_\ell$, Suche nach b_2: $\rightarrow v_r$

Intervall in y-Richtung

Vereinfachte Sichtweise

- ignoriere x- und z-Richtung
- **(DS2)** erlaubt uns Anfragen der Form $[a_2, \infty)$ und $(-\infty, b_2]$
- Ziel: baue neue Datenstruktur, die Anfragen der Form $[a_2, b_2]$ erlaubt

Binärer Suchbaum in y-Richtung



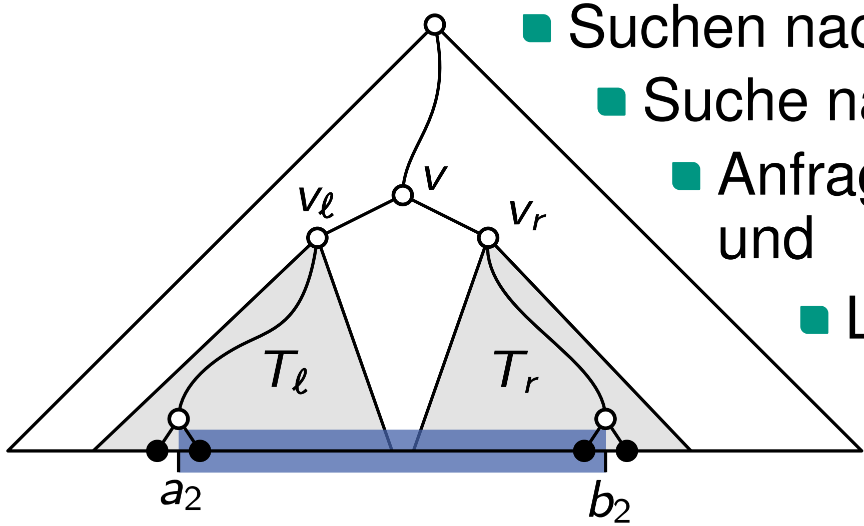
- Suchen nach a_2 und b_2 trennen sich an Knoten v
  - Suche nach a_2: $\rightarrow v_\ell$, Suche nach b_2: $\rightarrow v_r$
    - Anfragen an **(DS2)**: $[a_2, \infty)$ auf Punkten in T_ℓ und $(-\infty, b_2]$ auf Punkten in T_r

Intervall in y-Richtung

Vereinfachte Sichtweise

- ignoriere x- und z-Richtung
- **(DS2)** erlaubt uns Anfragen der Form $[a_2, \infty)$ und $(-\infty, b_2]$
- Ziel: baue neue Datenstruktur, die Anfragen der Form $[a_2, b_2]$ erlaubt

Binärer Suchbaum in y-Richtung



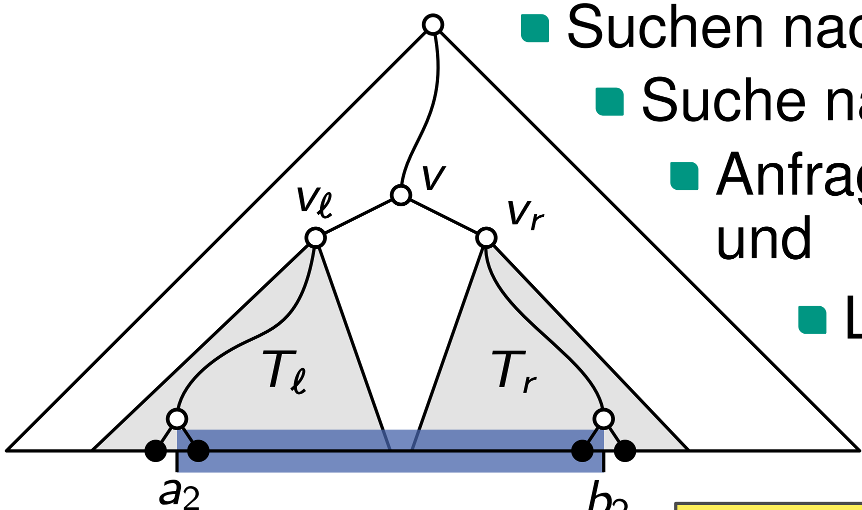
- Suchen nach a_2 und b_2 trennen sich an Knoten v
  - Suche nach a_2: $\rightarrow v_\ell$, Suche nach b_2: $\rightarrow v_r$
    - Anfragen an **(DS2)**: $[a_2, \infty)$ auf Punkten in T_ℓ und $(-\infty, b_2]$ auf Punkten in T_r
    - Laufzeit: $O(\underbrace{\log n}_{\text{suche in } y\text{-Baum}} + \underbrace{\log n + k}_{\text{zwei Anfragen in (DS2)}})$

Intervall in y-Richtung

Vereinfachte Sichtweise

- ignoriere x- und z-Richtung
- **(DS2)** erlaubt uns Anfragen der Form $[a_2, \infty)$ und $(-\infty, b_2]$
- Ziel: baue neue Datenstruktur, die Anfragen der Form $[a_2, b_2]$ erlaubt

Binärer Suchbaum in y-Richtung



- Suchen nach a_2 und b_2 trennen sich an Knoten v
  - Suche nach a_2: $\rightarrow v_\ell$, Suche nach b_2: $\rightarrow v_r$
    - Anfragen an **(DS2)**: $[a_2, \infty)$ auf Punkten in T_ℓ und $(-\infty, b_2]$ auf Punkten in T_r
      - Laufzeit: $O(\underbrace{\log n}_{\text{suche in } y\text{-Baum}} + \underbrace{\log n + k}_{\text{zwei Anfragen in (DS2)}})$
        - Speicherplatz: $O(\log n) \cdot$ (Platz für **DS2**)

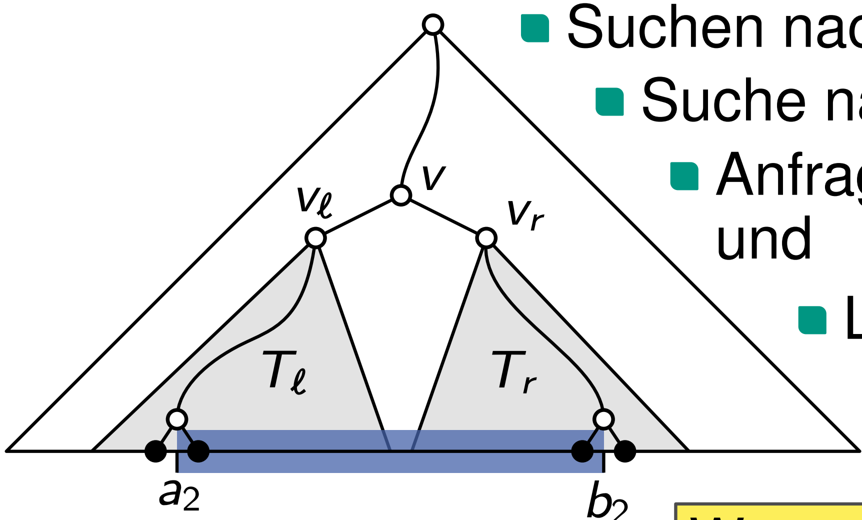
Warum?

Intervall in y-Richtung

Vereinfachte Sichtweise

- ignoriere x- und z-Richtung
- **(DS2)** erlaubt uns Anfragen der Form $[a_2, \infty)$ und $(-\infty, b_2]$
- Ziel: baue neue Datenstruktur, die Anfragen der Form $[a_2, b_2]$ erlaubt

Binärer Suchbaum in y-Richtung



- Suchen nach a_2 und b_2 trennen sich an Knoten v
  - Suche nach a_2: $\rightarrow v_\ell$, Suche nach b_2: $\rightarrow v_r$
    - Anfragen an **(DS2)**: $[a_2, \infty)$ auf Punkten in T_ℓ und $(-\infty, b_2]$ auf Punkten in T_r
- Laufzeit: $O(\underbrace{\log n}_{\text{suche in } y\text{-Baum}} + \underbrace{\log n + k}_{\text{zwei Anfragen in (DS2)}})$
- Speicherplatz: $O(\log n) \cdot$ (Platz für **DS2**)

Warum?

Lemma **(DS3)**

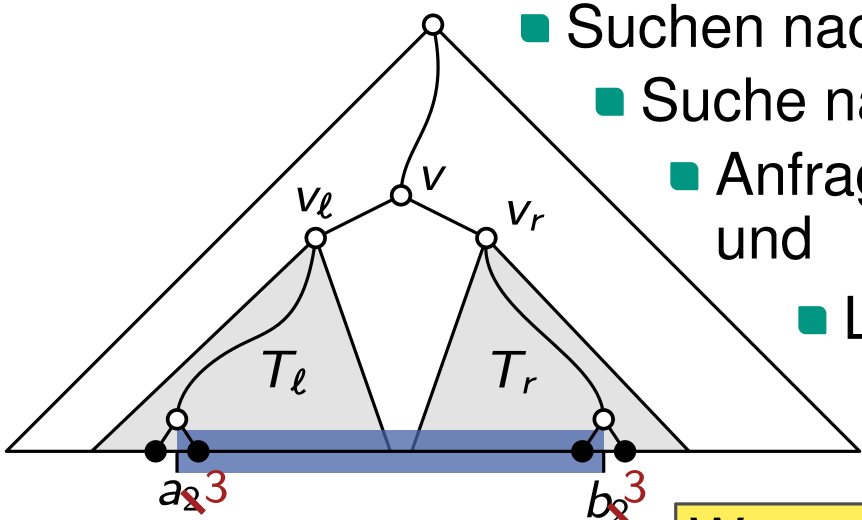
Für n Punkte in $\mathbb{R}^3$ können wir $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times (-\infty, b_3]$-Anfragen nach $O(n \log^2 n)$ Vorber. mit $O(n \log^2 n)$ Speicher in $O(\log n + k)$ Zeit beantworten.

Intervall in ~~y~~ z-Richtung

Vereinfachte Sichtweise

- ignoriere x- und ~~z~~ y-Richtung
- **(DS~~2~~ 3)** erlaubt uns Anfragen der Form $[a_{\cancel{2}3}, \infty)$ und $(-\infty, b_{\cancel{2}3}]$
- Ziel: baue neue Datenstruktur, die Anfragen der Form $[a_{\cancel{2}3}, b_{\cancel{2}3}]$ erlaubt

Binärer Suchbaum in ~~y~~ z-Richtung



- Suchen nach $a_{\cancel{2}3}$ und $b_{\cancel{2}3}$ trennen sich an Knoten v
  - Suche nach $a_{\cancel{2}3}$: $\rightarrow v_\ell$, Suche nach $b_{\cancel{2}3}$: $\rightarrow v_r$
    - Anfragen an **(DS2)**: $[a_{\cancel{2}3}, \infty)$ auf Punkten in T_ℓ und $(-\infty, b_{\cancel{2}3}]$ auf Punkten in T_r
      - Laufzeit: $O(\underbrace{\log n}_{\text{suche in } \cancel{y}z\text{-Baum}} + \underbrace{\log n + k}_{\text{zwei Anfragen in } \mathbf{(DS\cancel{2}3)}})$
      - Speicherplatz: $O(\log n) \cdot$ (Platz für **DS~~2~~ 3**)

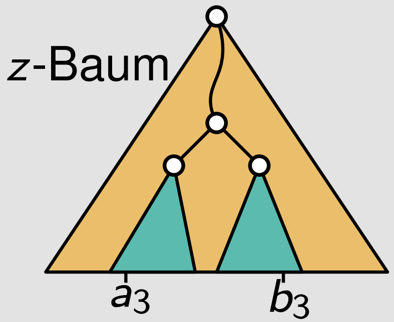
Warum?

> **~~Lemma~~ Theorem** **(DS~~3~~ 4)**
>
> Für n Punkte in $\mathbb{R}^3$ können wir $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times (\cancel{-\infty}^{\,a_3}, b_3]$-Anfragen nach $O(n \log^{\cancel{2}3} n)$ Vorber. mit $O(n \log^{\cancel{2}3} n)$ Speicher in $O(\log n + k)$ Zeit beantworten.

The Big Picture

(DS4) $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$
Vorber.: $O(n \log^3 n)$
Speicher: $O(n \log^3 n)$
Anfrage: $O(\log n + k)$

The Big Picture



(DS4) $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$

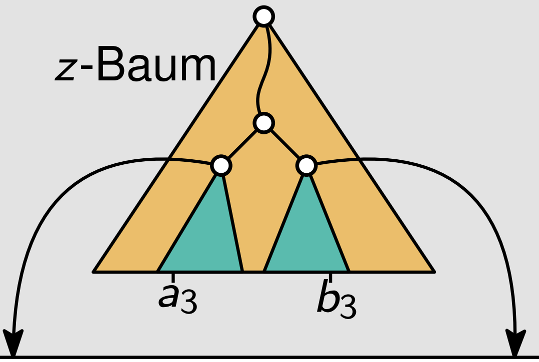
Vorber.: $O(n \log^3 n)$

Speicher: $O(n \log^3 n)$

Anfrage: $O(\log n + k)$

- suche nach a_3, b_3 in z-Baum
- Suche teilt sich: 2 Anfragen an **(DS3)**

The Big Picture

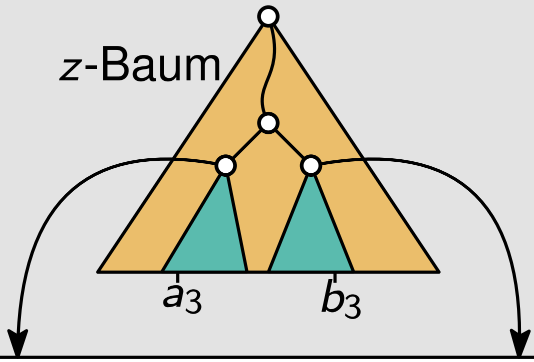


(DS4) $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$
Vorber.: $O(n \log^3 n)$
Speicher: $O(n \log^3 n)$
Anfrage: $O(\log n + k)$

- suche nach a_3, b_3 in z-Baum
- Suche teilt sich: 2 Anfragen an **(DS3)**

(DS3) $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times (-\infty, b_3]$
Vorber.: $O(n \log^2 n)$
Speicher: $O(n \log^2 n)$
Anfrage: $O(\log n + k)$

The Big Picture



(DS4) $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$

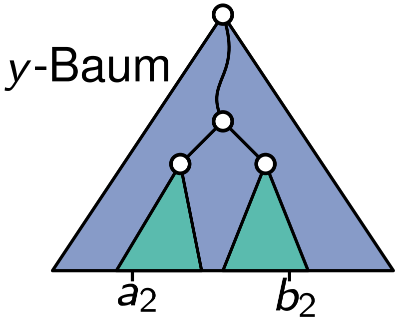
Vorber.: $O(n \log^3 n)$
Speicher: $O(n \log^3 n)$
Anfrage: $O(\log n + k)$

- suche nach a_3, b_3 in z-Baum
- Suche teilt sich: 2 Anfragen an **(DS3)**

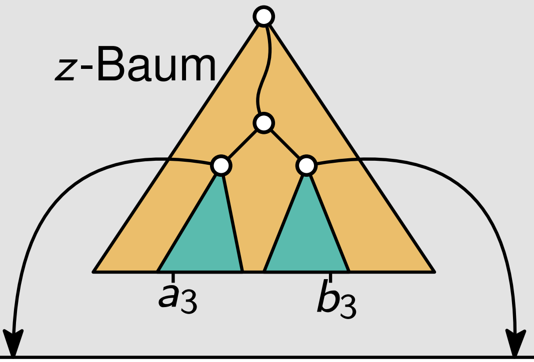
(DS3) $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times (-\infty, b_3]$

Vorber.: $O(n \log^2 n)$
Speicher: $O(n \log^2 n)$
Anfrage: $O(\log n + k)$

- suche nach a_2, b_2 in y-Baum
- Suche teilt sich: 2 Anfragen an **(DS2)**



The Big Picture



(DS4) $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$

Vorber.: $O(n \log^3 n)$

Speicher: $O(n \log^3 n)$

Anfrage: $O(\log n + k)$

- suche nach a_3, b_3 in z-Baum
- Suche teilt sich: 2 Anfragen an **(DS3)**

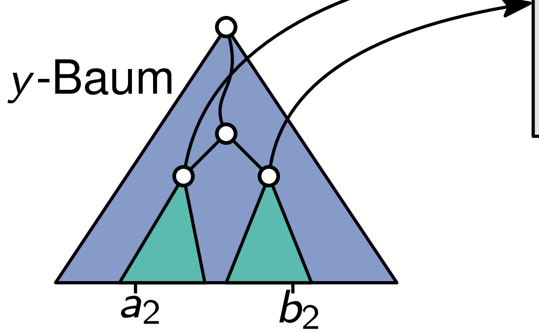
(DS3) $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times (-\infty, b_3]$

Vorber.: $O(n \log^2 n)$

Speicher: $O(n \log^2 n)$

Anfrage: $O(\log n + k)$

- suche nach a_2, b_2 in y-Baum
- Suche teilt sich: 2 Anfragen an **(DS2)**



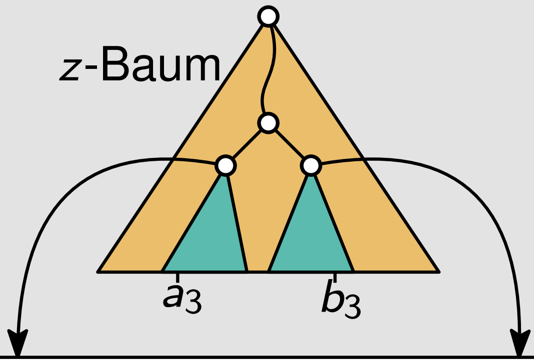
(DS2) $[a_1, b_1] \times (-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$

Vorber.: $O(n \log n)$

Speicher: $O(n \log n)$

Anfrage: $O(\log n + k)$

The Big Picture



(DS4) $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$

Vorber.: $O(n \log^3 n)$

Speicher: $O(n \log^3 n)$

Anfrage: $O(\log n + k)$

- suche nach a_3, b_3 in z-Baum
- Suche teilt sich: 2 Anfragen an **(DS3)**

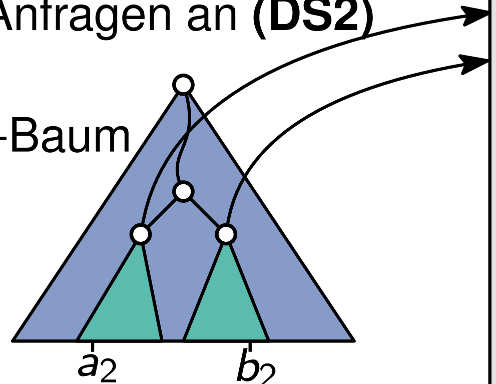
(DS3) $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times (-\infty, b_3]$

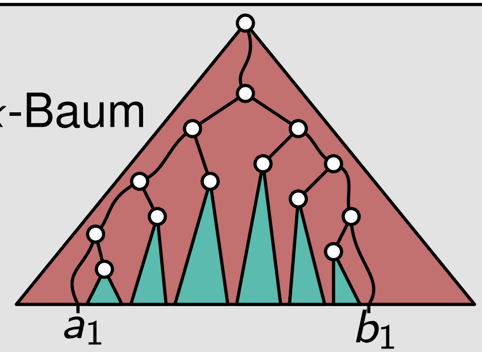
Vorber.: $O(n \log^2 n)$

Speicher: $O(n \log^2 n)$

Anfrage: $O(\log n + k)$

- suche nach a_2, b_2 in y-Baum
- Suche teilt sich: 2 Anfragen an **(DS2)**





(DS2) $[a_1, b_1] \times (-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$

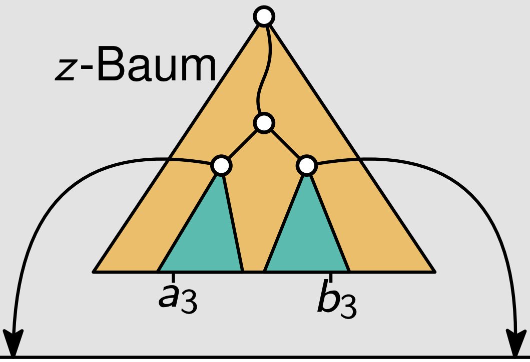
Vorber.: $O(n \log n)$

Speicher: $O(n \log n)$

Anfrage: $O(\log n + k)$

- suche nach z in Wurzel
- laufe x-Baum runter; folge z
- in den x-Teilbäumen: Anfrage an **(DS1)** (mit z-Startpos.)

The Big Picture

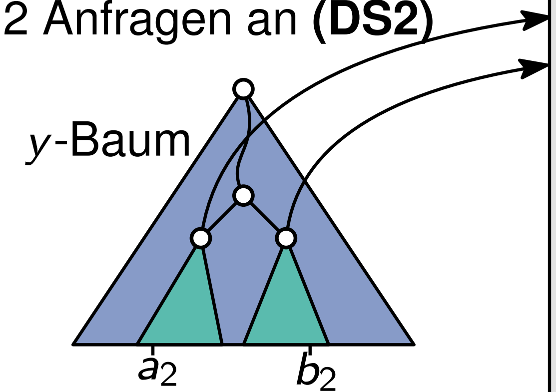


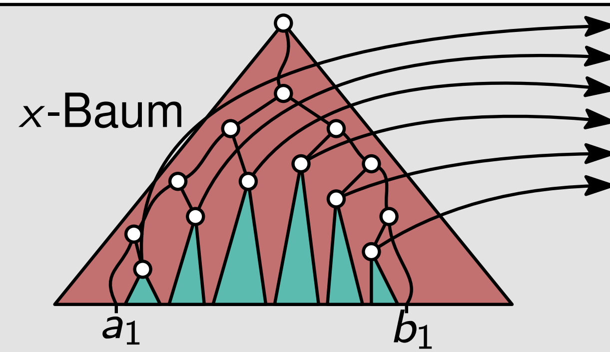
(DS4) $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$
Vorber.: $O(n \log^3 n)$
Speicher: $O(n \log^3 n)$
Anfrage: $O(\log n + k)$

- suche nach a_3, b_3 in z-Baum
- Suche teilt sich: 2 Anfragen an **(DS3)**

(DS3) $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times (-\infty, b_3]$
Vorber.: $O(n \log^2 n)$
Speicher: $O(n \log^2 n)$
Anfrage: $O(\log n + k)$

- suche nach a_2, b_2 in y-Baum
- Suche teilt sich: 2 Anfragen an **(DS2)**



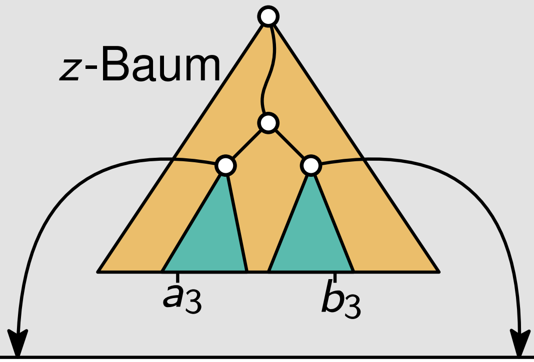


(DS1) $(-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$
Anfrage: $O(k)$
Vorber.: $O(n)$ (wenn Punkte sortiert)
Speicher: $O(n)$

(DS2) $[a_1, b_1] \times (-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$
Vorber.: $O(n \log n)$
Speicher: $O(n \log n)$
Anfrage: $O(\log n + k)$

- suche nach z in Wurzel
- laufe x-Baum runter; folge z
- in den x-Teilbäumen: Anfrage an **(DS1)** (mit z-Startpos.)

The Big Picture



(DS4) $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$

Vorber.: $O(n \log^3 n)$

Speicher: $O(n \log^3 n)$

Anfrage: $O(\log n + k)$

- suche nach a_3, b_3 in z-Baum
- Suche teilt sich: 2 Anfragen an **(DS3)**

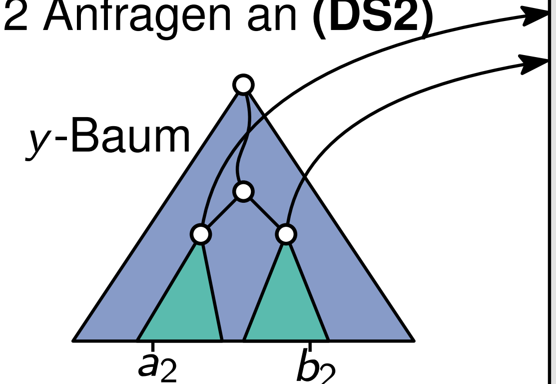
(DS3) $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times (-\infty, b_3]$

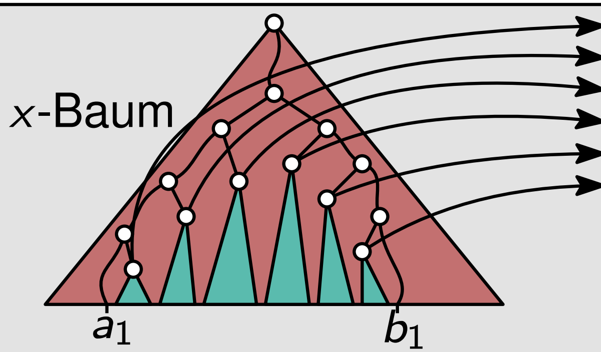
Vorber.: $O(n \log^2 n)$

Speicher: $O(n \log^2 n)$

Anfrage: $O(\log n + k)$

- suche nach a_2, b_2 in y-Baum
- Suche teilt sich: 2 Anfragen an **(DS2)**





(DS2) $[a_1, b_1] \times (-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$

Vorber.: $O(n \log n)$

Speicher: $O(n \log n)$

Anfrage: $O(\log n + k)$

- suche nach z in Wurzel
- laufe x-Baum runter; folge z
- in den x-Teilbäumen: Anfrage an **(DS1)** (mit z-Startpos.)

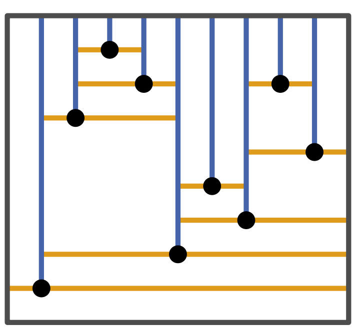
(DS1) $(-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$

Anfrage: $O(k)$

Vorber.: $O(n)$ (wenn Punkte sortiert)

Speicher: $O(n)$

- z-Startposition bekannt
- laufe in y-Richtung; folge z
- gibt geschnittene Strahlen aus



Zusammenfassung

Heute gesehen

- fractional cascading: nur einmal Suchen und dann Zeigern folgen ist besser als immer neu zu suchen

Zusammenfassung

Heute gesehen

- fractional cascading: nur einmal Suchen und dann Zeigern folgen ist besser als immer neu zu suchen
- Vereinfachung von Bereichsanfragen: $(-\infty, b]$ statt $[a, b]$

Zusammenfassung

Heute gesehen

- fractional cascading: nur einmal Suchen und dann Zeigern folgen ist besser als immer neu zu suchen
- Vereinfachung von Bereichsanfragen: $(-\infty, b]$ statt $[a, b]$
- schöne geometrische Lösung für $(-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$

Zusammenfassung

Heute gesehen

- fractional cascading: nur einmal Suchen und dann Zeigern folgen ist besser als immer neu zu suchen
- Vereinfachung von Bereichsanfragen: $(-\infty, b]$ statt $[a, b]$
- schöne geometrische Lösung für $(-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$
- Transformation, die aus $(-\infty, b]$ ein $[a, b]$ macht

Zusammenfassung

Heute gesehen

- fractional cascading: nur einmal Suchen und dann Zeigern folgen ist besser als immer neu zu suchen
- Vereinfachung von Bereichsanfragen: $(-\infty, b]$ statt $[a, b]$
- schöne geometrische Lösung für $(-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$
- Transformation, die aus $(-\infty, b]$ ein $[a, b]$ macht

Theorem **((DS4) $d \geq 3$)**
Für n Punkte in $\mathbb{R}^d$ können wir Bereichsanfragen nach $O(n \log^d n)$ Vorberechnung mit $O(n \log^d n)$ Speicher in $O(\log^{d-2} n + k)$ Zeit beantworten.

Zusammenfassung

Heute gesehen

- fractional cascading: nur einmal Suchen und dann Zeigern folgen ist besser als immer neu zu suchen
- Vereinfachung von Bereichsanfragen: $(-\infty, b]$ statt $[a, b]$
- schöne geometrische Lösung für $(-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$
- Transformation, die aus $(-\infty, b]$ ein $[a, b]$ macht

Theorem **((DS4) $d \geq 3$)**
Für n Punkte in $\mathbb{R}^d$ können wir Bereichsanfragen nach $O(n \log^d n)$ Vorberechnung mit $O(n \log^d n)$ Speicher in $O(\log^{d-2} n + k)$ Zeit beantworten.

Was gibt es sonst noch

- diverse Anwendungen für fractional cascading

Zusammenfassung

Heute gesehen

- fractional cascading: nur einmal Suchen und dann Zeigern folgen ist besser als immer neu zu suchen
- Vereinfachung von Bereichsanfragen: $(-\infty, b]$ statt $[a, b]$
- schöne geometrische Lösung für $(-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$
- Transformation, die aus $(-\infty, b]$ ein $[a, b]$ macht

Theorem **((DS4) $d \geq 3$)**
Für n Punkte in $\mathbb{R}^d$ können wir Bereichsanfragen nach $O(n \log^d n)$ Vorberechnung mit $O(n \log^d n)$ Speicher in $O(\log^{d-2} n + k)$ Zeit beantworten.

Was gibt es sonst noch

- diverse Anwendungen für fractional cascading
- dynamische Varianten: Punkte löschen und einfügen

Zusammenfassung

Heute gesehen

- fractional cascading: nur einmal Suchen und dann Zeigern folgen ist besser als immer neu zu suchen
- Vereinfachung von Bereichsanfragen: $(-\infty, b]$ statt $[a, b]$
- schöne geometrische Lösung für $(-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$
- Transformation, die aus $(-\infty, b]$ ein $[a, b]$ macht

Theorem **((DS4) $d \geq 3$)**
Für n Punkte in $\mathbb{R}^d$ können wir Bereichsanfragen nach $O(n \log^d n)$ Vorberechnung mit $O(n \log^d n)$ Speicher in $O(\log^{d-2} n + k)$ Zeit beantworten.

Was gibt es sonst noch

- diverse Anwendungen für fractional cascading
- dynamische Varianten: Punkte löschen und einfügen
- $O(\log n \cdot (\log n / \log \log n)^{d-3} + k)$ Anfragen
  $O(n \cdot (\log n / \log \log n)^{d-3})$ Speicher

Zusammenfassung

Heute gesehen

- fractional cascading: nur einmal Suchen und dann Zeigern folgen ist besser als immer neu zu suchen
- Vereinfachung von Bereichsanfragen: $(-\infty, b]$ statt $[a, b]$
- schöne geometrische Lösung für $(-\infty, b_2] \times (-\infty, b_3]$
- Transformation, die aus $(-\infty, b]$ ein $[a, b]$ macht

Theorem **((DS4) $d \geq 3$)**
Für n Punkte in $\mathbb{R}^d$ können wir Bereichsanfragen nach $O(n \log^d n)$ Vorberechnung mit $O(n \log^d n)$ Speicher in $O(\log^{d-2} n + k)$ Zeit beantworten.

Was gibt es sonst noch

- diverse Anwendungen für fractional cascading
- dynamische Varianten: Punkte löschen und einfügen
- $O(\log n \cdot (\log n / \log \log n)^{d-3} + k)$ Anfragen
  $O(n \cdot (\log n / \log \log n)^{d-3})$ Speicher
- noch bessere Schranken im Word-RAM-Modell