Karlsruher Institut für Technologie

# Algorithmische Geometrie

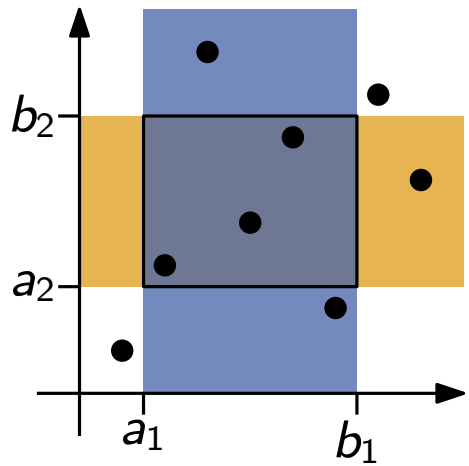
## Orthogonale Bereichsanfragen – Range-Trees

# Bereichsanfragen

**Problem: Bereichsanfragen**
Gegeben eine Punktemenge $P \in \mathbb{R}^d$ sowie eine Box $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_d, b_d]$, finde alle Punkte in $P \cap B$.

## Statisch Variante

- Punktemenge $P$ ist fest
- viele verschiedene Bereichsanfragen
- entwickle Datenstruktur auf $P$, sodass
  - jede Anfrage ist schnell
  - Datenstruktur kann schnell aufgebaut werden
  - Datenstruktur benötigt wenig Platz




Was sind mögliche Anwendungen?

# 1D-Bereichsanfragen

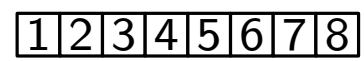
**Problem: Bereichsanfragen**
Gegeben eine Punktemenge $P \in \mathbb{R}^d$ sowie eine Box $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_d, b_d]$, finde alle Punkte in $P \cap B$.

## Einfachster Fall: $d = 1$

- die Punkte sind einfach nur Zahlen
- wir suchen alle Zahlen in einem gegebenen Intervall

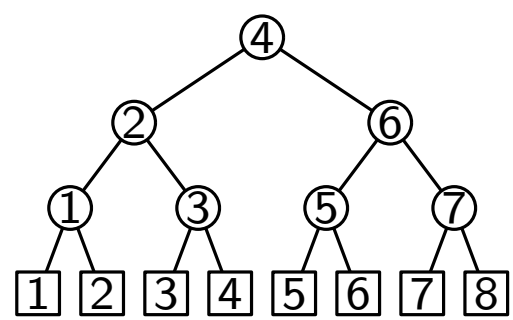
## Lösung 1

- Vorberechnung: sortiere die Zahlen $\rightarrow O(n \log n)$
- Anfrage: binärer Suche $\rightarrow O(\log n + k)$ ($k$ = Ausgabegröße)




## Lösung 2

- binärer Suchbaum mit Punkten in den Blättern
- Anfrage: suche im Suchbaum



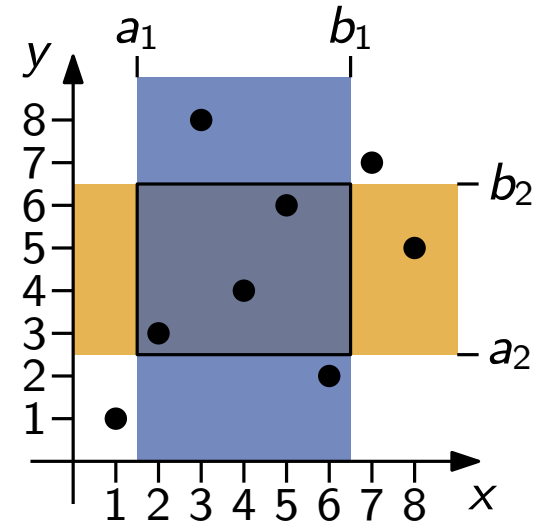

Wie suchen wir?

Welche Werte haben die inneren Knoten?

# 2D-Bereichsanfragen

## Idee

- suche zunächst in der ersten Dimension ($x$)
- suche auf dem Ergebnis in zweiter Dimension ($y$)




suche nach $x \in [a_1, b_1]$:

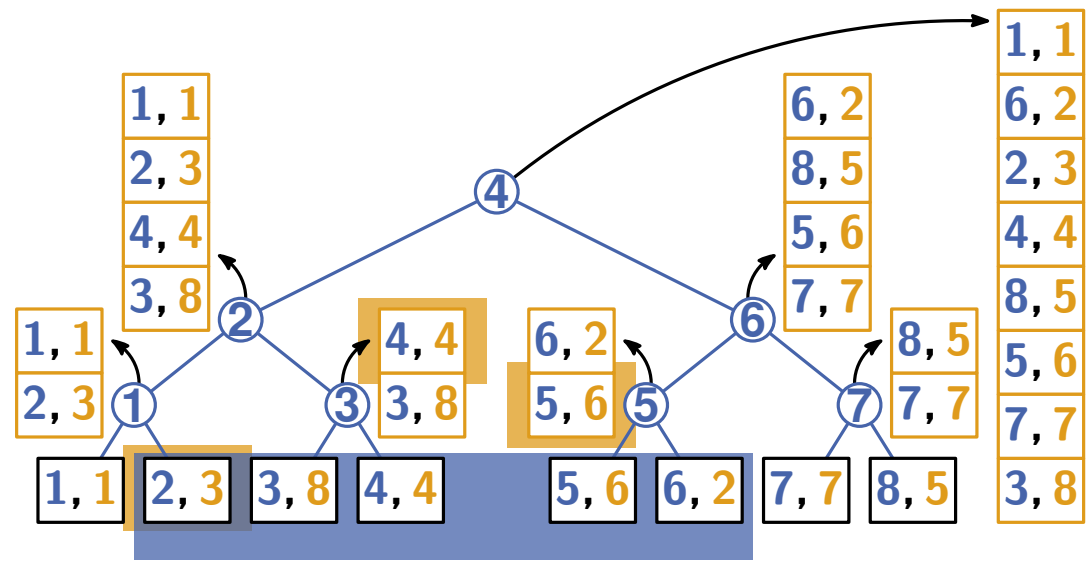

## Problem

- $y$-Suche läuft auf einer Teilmenge der Punkte
- wir können nicht für jede mögliche Teilmenge ein $y$-sortiertes Array bauen

Warum nicht?

## Idee

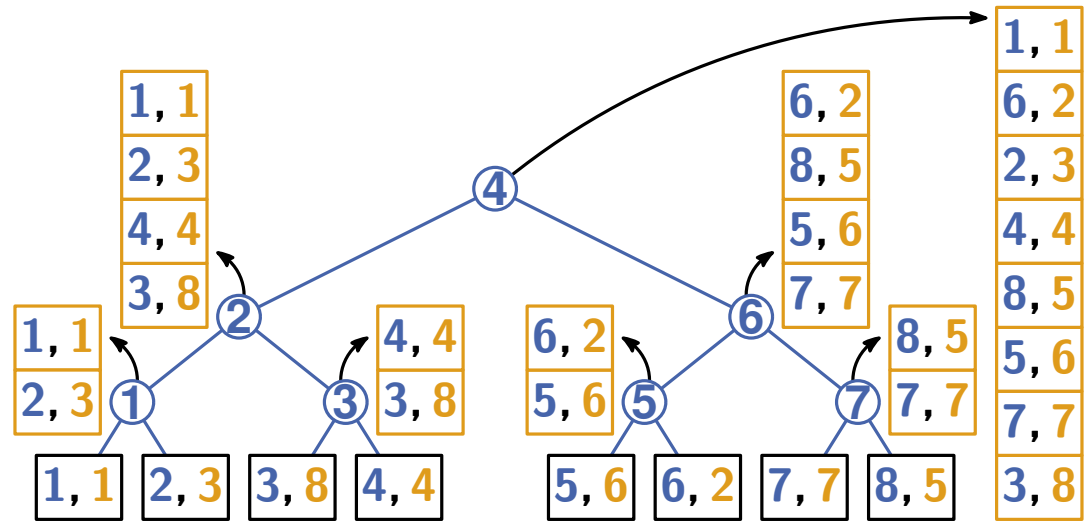
- berechne $y$-sortiertes Array für wenige wichtige Teilmengen
- Knoten in $x$-Suchbaum liefern wichtige Teilmengen
- diese Datenstruktur heißt 2D-Range-Tree



# Bereichsanfrage in einem 2D-Range-Tree

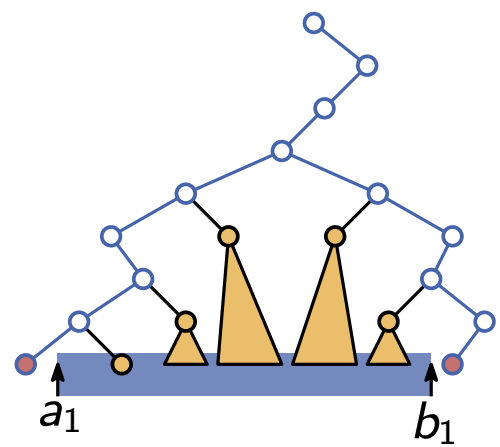
## Idee

- berechne $y$-sortiertes Array für wenige wichtige Teilmengen
- Knoten in $x$-Suchbaum liefern wichtige Teilmengen
- diese Datenstruktur heißt 2D-Range-Tree




## Anfrage $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$

- suche nach Vorgänger von $a_1$ und Nachfolger von $b_1$ im $x$-Baum
- für Knoten direkt unter dem Pfad: suche in entsprechenden $y$-Array nach $[a_2, b_2]$ und gibt gefundene Punkte aus



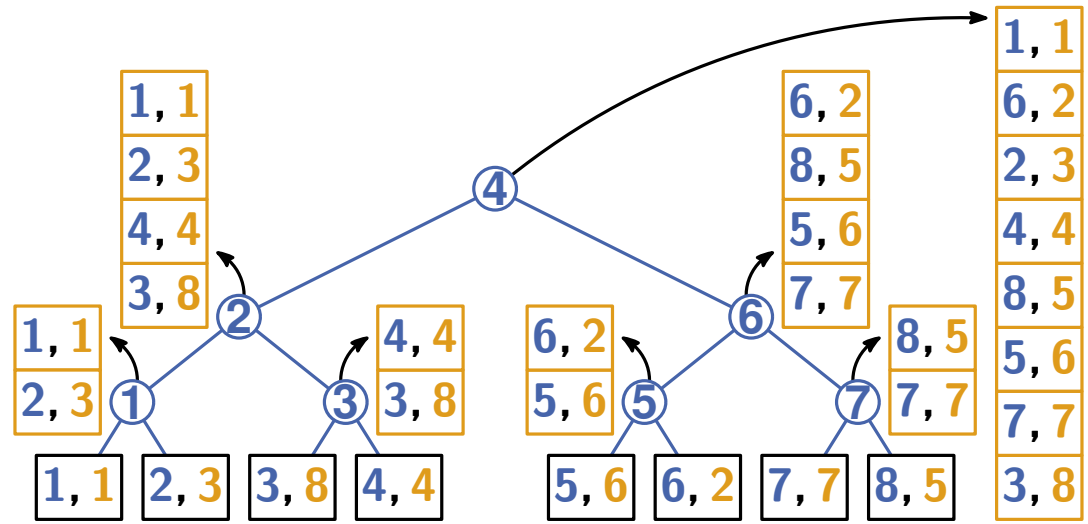

## Laufzeit einer Anfrage

- suche im $x$-Baum $\rightarrow O(\log n)$
- suche in $O(\log n)$ $y$-Arrays $\rightarrow O(\log^2 n)$ (nicht vergessen: $O(k)$ für die Ausgabe)

# Berechnung eines 2D-Range-Trees

## Idee

- berechne $y$-sortiertes Array für wenige wichtige Teilmengen
- Knoten in $x$-Suchbaum liefern wichtige Teilmengen
- diese Datenstruktur heißt 2D-Range-Tree



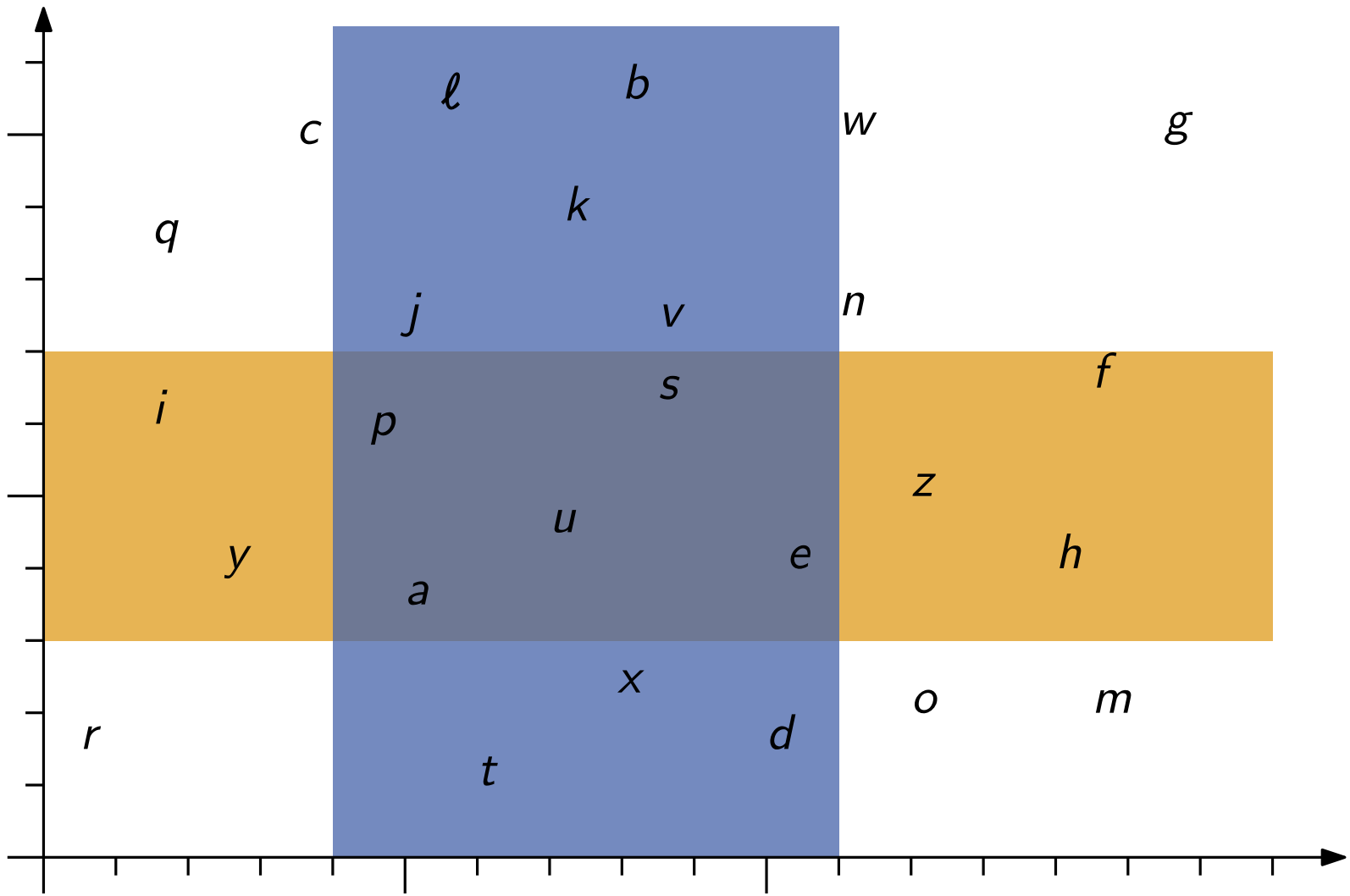

## Aufbau

- berechne den $x$-Baum $\rightarrow O(n \log n)$
- jedes $y$-Array für sich sortieren: $O(n \log n)$ pro Layer $\rightarrow O(n \log^2 n)$
- Verbesserung des zweiten Schritts $\rightarrow O(n \log n)$
  - sortiere einmal alle Punkte nach $y \rightarrow O(n \log n)$
  - spalte sortiertes Array auf um sortierte Arrays für die Kinder zu erhalten
  - $O(n)$ pro Layer $\rightarrow O(n \log n)$

## Speicherverbrauch

- $O(n)$ pro Layer $\rightarrow O(n \log n)$

# Was ist das Ergebnis?



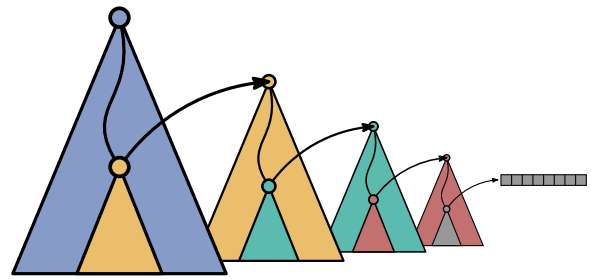

Bereichsanfrage: $[4, 11] \times [3, 7]$

# Allgemeine Range-Trees

**Theorem (2D-Range-Trees)**
Der 2D-Range-Tree für $n$ Punkte kann in $O(n \log n)$ berechnet werden, benötigt $O(n \log n)$ Speicher und erlaubt Bereichsanfragen in $O(\log^2 n + k)$.

**Dimension $d$**

- binärer Suchbaum für Dimension 1
- jeder Knoten kennt $(d-1)$-dim Range-Tree für Dimensionen $2 \ldots d$ der entsprechenden Elemente



**Theorem (Range-Trees für $d \geq 2$)**
Der Range-Tree für $n$ Punkte in $\mathbb{R}^d$ kann in $O(n \log^{d-1} n)$ berechnet werden, benötigt $O(n \log^{d-1} n)$ Speicher und erlaubt Anfragen in $O(\log^d n + k)$.

**Beweis:** Induktion über $d$ (Induktionsanfang $d = 2$ bereits abgehandelt)

- binärer Suchbaum für Dim. 1 aufbauen: $O(n \log n)$ Zeit und $O(n)$ Platz
- pro Knoten: Range-Tree mit Dim. $d-1$ der entsprechenden Punkte: $O(n \log^{d-2} n)$ Zeit, $O(n \log^{d-2} n)$ Platz pro Layer $\rightarrow$ gesamt: $O(n \log^{d-1} n)$
- Anfrage: $O(\log n)$ für Dim. 1 und $O(\log n)$ Anfragen in $(d-1)$D-Range-Trees (mit disjunkten Ausgaben!)

# Geht es besser?

| | $d = 1$ | $d = 2$ | $d > 2$ |
|---|---|---|---|
| **Bereichsanfrage** | $\log n + k$ | $\log^2 n + k$ | $\log^d n + k$ |
| **Vorberechnung** | $n \log n$ | $n \log n$ | $n \log^{d-1} n$ |
| **Speicherplatz** | $n$ | $n \log n$ | $n \log^{d-1} n$ |

- pro Dimension verlieren wir einen $\log n$ Faktor
- wenn wir den Fall $d = 2$ verbessern wird $d > 2$ auch besser
- von 1 zu 2 haben wir schon getrickst um $\log n$ Vorberechnung zu sparen

**Heute**

- spare $\log n$ für die Anfragen für $d = 2$
- spart auch einen $\log n$ Faktor für alle höheren Dimensionen

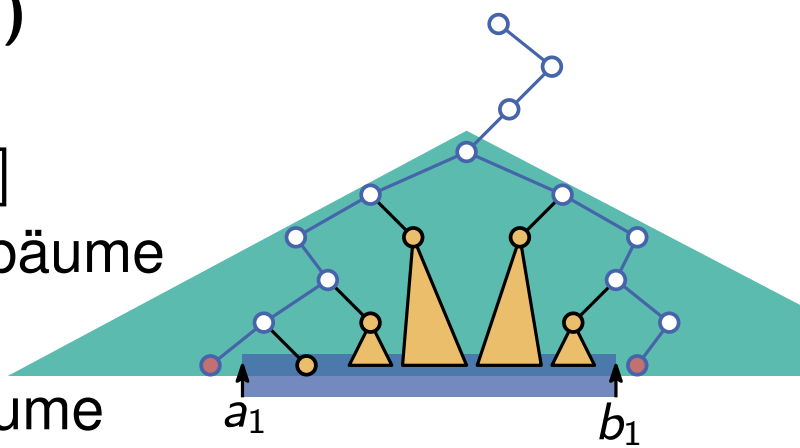
**Nächste Woche**

- spare einen weiteren $\log n$ Faktor für $d = 3$ bei den Anfragen
- dafür bezahlt man einen $\log n$ Faktor bei Vorberechnung und Speicher

# Warum ist das so teuer?

**Erinnerung: Bereichsanfrage in $O(\log^2 n + k)$**

- Suche im $x$-Baum $\rightarrow O(\log n)$
  - findet alle Punkte mit $x$-Koordinate in $[a_1, b_1]$
  - implizite Repräsentation durch $O(\log n)$ Teilbäume
- binäre Suchen in $y$-Richtung
  - eine Suche (bzw. zwei) für jeden der Teilbäume
  - $O(\log n)$ pro Suche $\rightarrow O(\log^2 n)$




**Eigentlich...**

- suchen wir ja insgesamt nur auf $\leq n$ Zahlen
- und wir suchen immer nach den gleichen Zahlen ($a_2$ und $b_2$)
- brauchen wir nur so lange, weil die Zahlen in Teilmengen zerstückelt sind
- könnten wir sogar auf allen $n$ Zahlen suchen und wären schneller

**Idee:** suche nur einmal auf einer Obermenge der Punkte

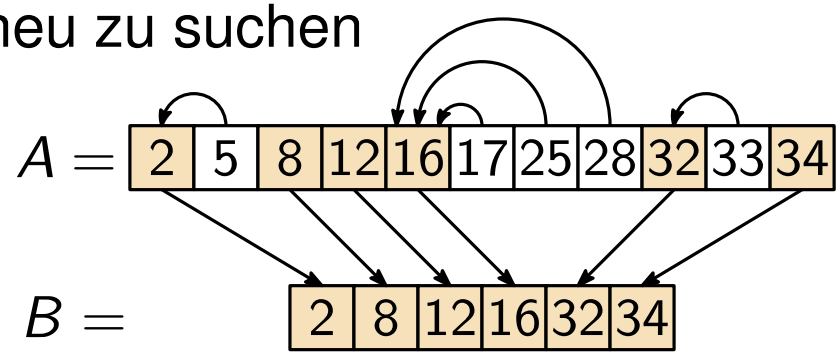
**Problem:** Ergebnis enthält potentiell zu viele Punkte (bzgl. $x$-Koordinate)

**Idee:** Suche in Obermenge; Ausgabe in den korrekten Teilmengen

# Suche in einer Obermenge

## Situation (etwas vereinfacht)

- betrachte sortierte Arrays von Zahlen $A$ und $B$ mit $B \subseteq A$
- suche nach $x$ in $A$
- finde $x$ in $B$ ohne neu zu suchen




## Fall 1: $x \in B$

- Zeiger von Elementen aus $A$ zu Kopien in $B \rightarrow$ finde $x$ in $B$ in $O(1)$

## Fall 2: $x \in A$ aber $x \notin B$

- Ziel: finde Vorgänger von $x$ in $B$
- Zeiger von jedem $a \in A \setminus B$ zu Vorgänger in $A \cap B \rightarrow$ finde $x$ in $B$ in $O(1)$

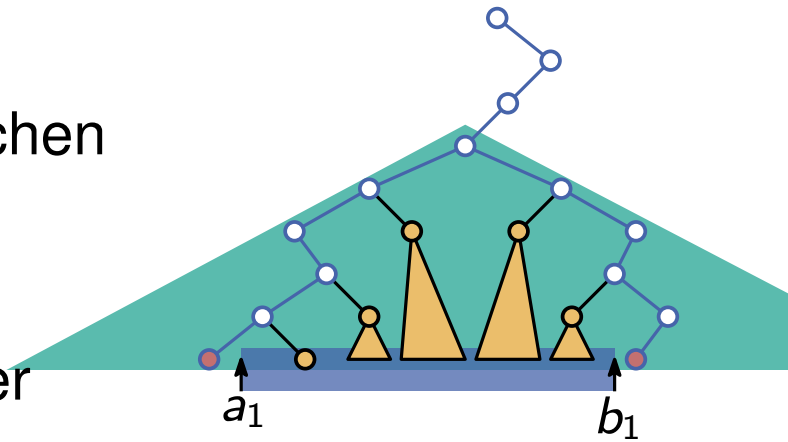
## Fall 3: $x \notin A$

- Ziel: finde Vorgänger von $x$ in $B$, wobei wir Vorgänger von $x$ in $A$ kennen
- benutze Fall 1 oder 2 $\rightarrow$ finde $x$ in $B$ in $O(1)$

# Und jetzt für Range-Trees

## Plan

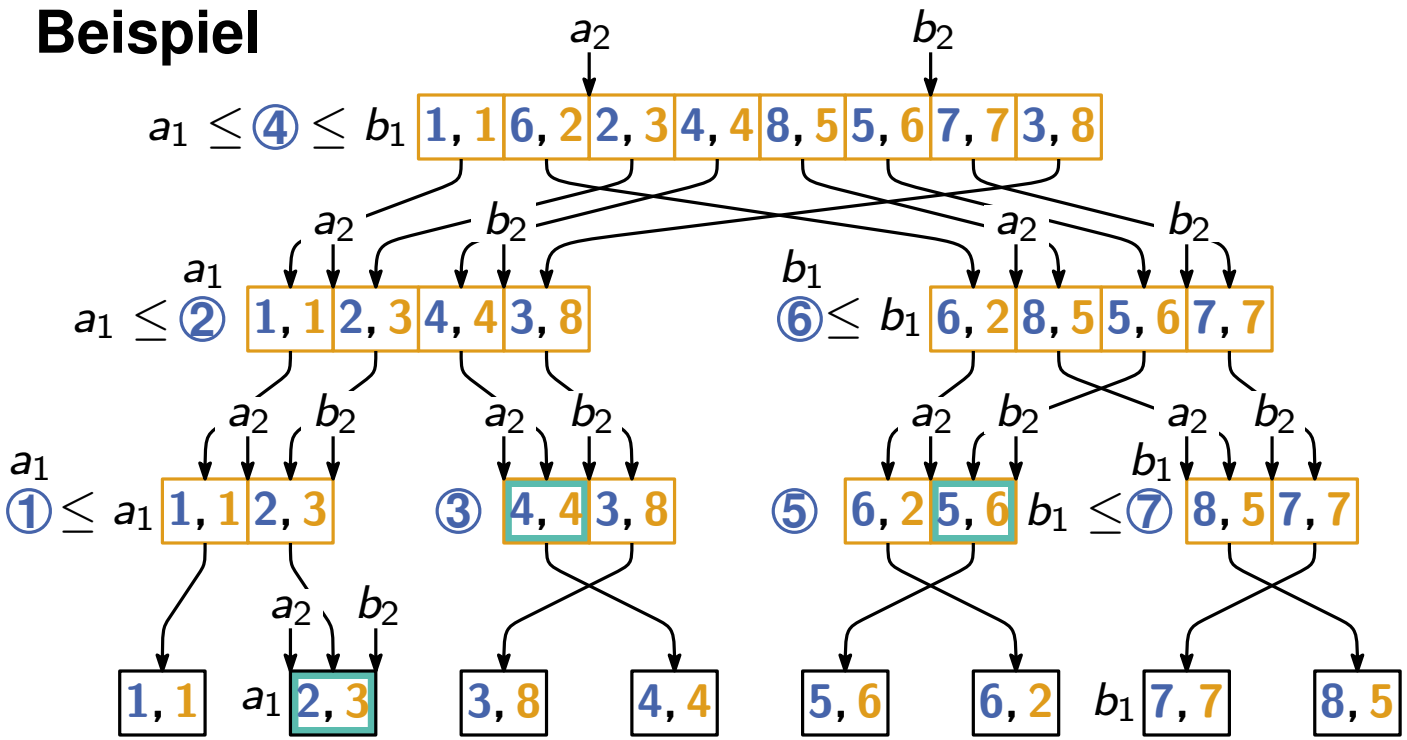
- suche nach $a_2$ und $b_2$ in der Obermenge
- finde $a_2$ und $b_2$ in den Teilmengen ohne zu suchen

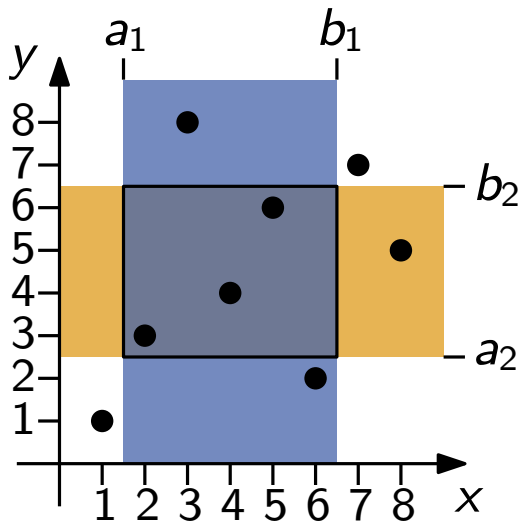



## So viele Teilmengen

- Problem: viele Teilmengen $\rightarrow$ zu viele Zeiger
- Lösung: speichere Zeiger nur für direkte Kinder

## Beispiel



# Passt das jetzt alles so?

## Bereichsanfrage

- suche in $y$-Array der Wurzel $\rightarrow O(\log n)$
- herunterlaufen im $x$-Baum
  - Entscheidung rechts/links $\rightarrow O(1)$
  - finden der Begrenzungen im $y$-Array (ohne Suche) $\rightarrow O(1)$
  - nur $O(\log n)$ Lagen $\rightarrow O(\log n)$
- Ergebnis ausgeben $\rightarrow O(k)$

## Speicherplatz

- nur konstanter Faktor Overhead für jedes $y$-Array

## Vorberechnung

- Berechnung der Teilarrays (bisher): sortiere in Wurzel und spalte auf
- dabei können die nötigen Zeiger mitberechnet werden

**Theorem (Verbesserte Range-Trees für $d \geq 2$)**
Für $n$ Punkte in $\mathbb{R}^d$ können wir Bereichsanfragen nach $O(n \log^{d-1} n)$ Vorberechnung mit $O(n \log^{d-1} n)$ Speicher in $O(\log^{d-1} n + k)$ Zeit beantworten.

# Zusammenfassung

## Heute gesehen

- Verallgemeinerung von binärer Suche auf mehrere Dimensionen
- Range Trees: verschachtelte binäre Suchbäume
- eine große Suche ist besser als viele kleine
  $\rightarrow$ geschickte Verzeigerung spart $\log n$

**Theorem (Verbesserte Range-Trees für $d \geq 2$)**
Für $n$ Punkte in $\mathbb{R}^d$ können wir Bereichsanfragen nach $O(n \log^{d-1} n)$ Vorberechnung mit $O(n \log^{d-1} n)$ Speicher in $O(\log^{d-1} n + k)$ Zeit beantworten.

## Nächste Woche

- Verallgemeinerung des Konzept der geschickten Verzeigerung
  $\rightarrow$ fractional cascading
- das lässt uns noch einen $\log n$ Faktor bei der Anfrage sparen ($d \geq 3$)
- kostet einen zusätzlichen $\log n$ Faktor bei Vorberechnung und Speicher