

Algorithmische Geometrie

Lineare Programme & Schnitt von Halbebenen



Entwicklung einer Gussform

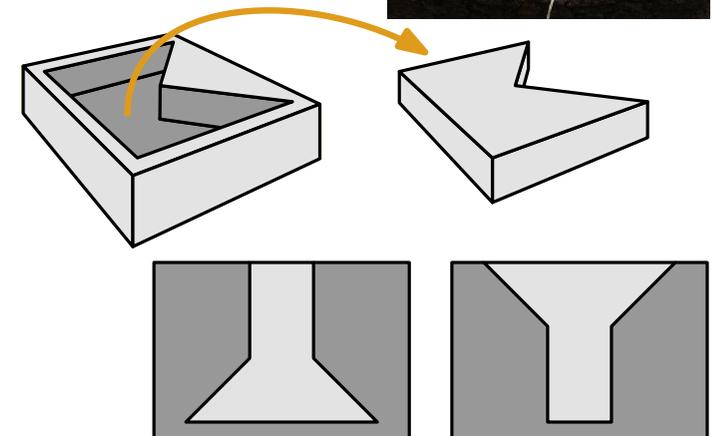
Gießverfahren (Fertigungsverfahren)

- wiederholten Herstellung eines Objekts
- flüssiges Material wird in die Gussform gegossen
- dort verfestigt es sich und wird wieder herausgenommen
- Verlorene Formen: werden beim herausnehmen zerstört
- Dauerformen: können erhalten werden



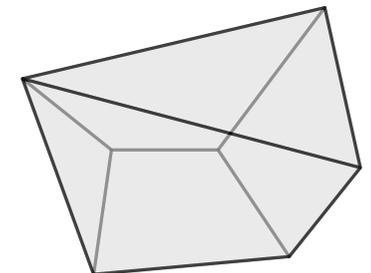
Für welche Objekte gibt es Dauerformen?

- Annahme: Form besteht aus nur einem Teil
- herausnehmen des gegossenen Objekts ist nicht immer möglich
- eine andere Gussform für dasselbe Objekt funktioniert



Problem: Gussform

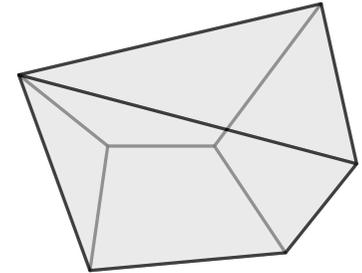
Gegeben ein Polyeder P , gibt es eine Gussform für P , aus der P mittels einer Translation entfernt werden kann?



Erste Beobachtungen

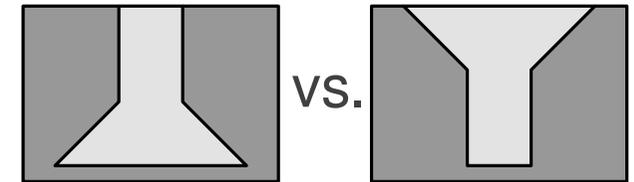
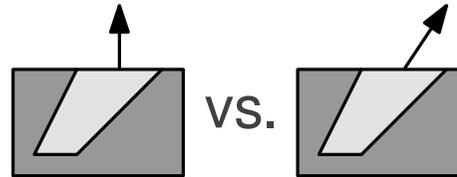
Problem: Gussform

Gegeben ein Polyeder P , gibt es eine Gussform für P , aus der P mittels einer Translation entfernt werden kann?



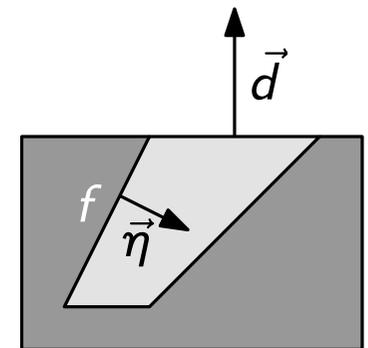
Welche Entscheidungen haben wir zu treffen?

- die Wahl der oberen Facette
- die Richtung der Translation



Vereinfachte Situation

- obere Facette schon ausgewählt \Rightarrow Gussform steht fest
- Richtung der Translation: $\vec{d} = (\vec{d}_x \quad \vec{d}_y \quad \vec{d}_z)^T \in \mathbb{R}^3$
- betrachte eine gewöhnliche Facette f (nicht die obere)
- sei $\vec{\eta}$ die innere Normale
- Problem: Winkel zwischen \vec{d} und $\vec{\eta}$ ist größer 90°



Lemma

P kann genau dann in Richtung \vec{d} entfernt werden, wenn der Winkel zwischen \vec{d} und der inneren Normalen jeder gewöhnlichen Facette $\leq 90^\circ$ ist.

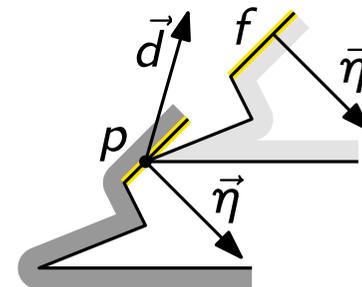
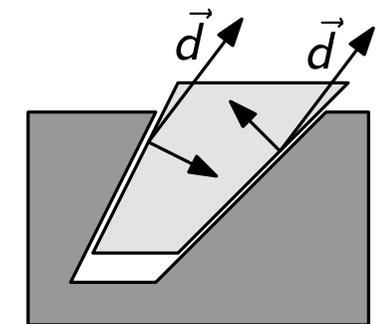
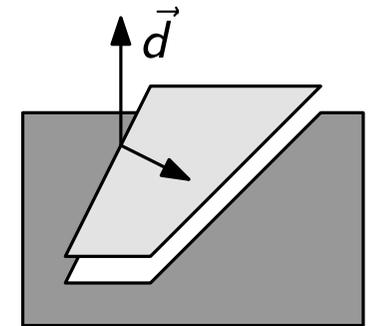
Gute und schlechte Translationen

Lemma

P kann genau dann in Richtung \vec{d} entfernt werden, wenn der Winkel zwischen \vec{d} und der inneren Normalen jeder gewöhnlichen Facette $\leq 90^\circ$ ist.

Beweis

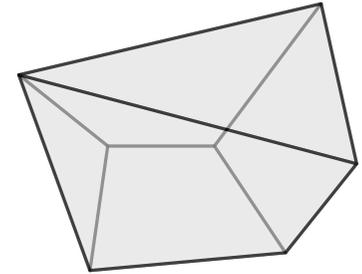
- Winkel $> 90^\circ \Rightarrow$ kann nicht entfernt werden
 - scheitert schon zu Beginn der Translation
- Winkel $\leq 90^\circ \Rightarrow$ kann entfernt werden
 - zu Beginn geht erstmal alles gut
 - Kann das Polyeder später nochmal mit der Gussform kollidieren?
 - sei p der erste Punkt von P , der mit der Form kollidiert
 - sei f die zugehörige Facette von P mit innerer Normalen $\vec{\eta}$
 - Winkel zwischen \vec{d} und $\vec{\eta}$: $> 90^\circ$



Was wollen wir eigentlich?

Problem: Gussform

Gegeben ein Polyeder P , gibt es eine Gussform für P , aus der P mittels einer Translation entfernt werden kann?



Ziel

- wähle obere Facette für P und eine Richtung $\vec{d} = (\vec{d}_x \quad \vec{d}_y \quad \vec{d}_z)^T \in \mathbb{R}^3$
- sodass für jede innere Normale $\vec{\eta}$ einer gewöhnlichen Facette gilt:
Winkel zwischen \vec{d} und $\vec{\eta}$ ist maximal 90°
- beachte: wir können $\vec{d}_z = 1$ annehmen **Warum?**

Erinnerung (Skalarprodukt): Winkel zwischen \vec{d} und $\vec{\eta} \leq 90^\circ \Leftrightarrow \vec{d} \cdot \vec{\eta} \geq 0$

Neuformulierung des Problems (für feste obere Facette)

- finde \vec{d}_x und \vec{d}_y
- sodass für jede gewöhnliche Facette gilt: $\vec{\eta}_x \cdot \vec{d}_x + \vec{\eta}_y \cdot \vec{d}_y + \vec{\eta}_z \geq 0$

→ das ist ein lineares Programm (LP) **Ist die Ungleichung wirklich linear?**

Lineare Programme

Allgemeines Form eines LPs

maximiere $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_dx_d$

sodass $a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,d}x_d \leq b_1$

$a_{2,1}x_1 + \dots + a_{2,d}x_d \leq b_2$

\vdots

$a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,d}x_d \leq b_n$

- Variablen x_1, \dots, x_d
- $a_{i,j}, b_i, c_i$ sind Konstanten
- eine Zielfunktion
- n Nebenbedingungen
- d ist die Dimension des LPs
- Theorie: polynomiell lösbar
- Praxis: effiziente Algorithmen (Simplex)

Unser konkretes LP

- Variablen $\vec{d}_x, \vec{d}_y \rightarrow$ Dimension ist 2
- Nebenbedingung für jede Facette: $\vec{\eta}_x \cdot \vec{d}_x + \vec{\eta}_y \cdot \vec{d}_y + \vec{\eta}_z \geq 0$
- keine Zielfunktion

Algorithmus für das Gussform-Problem

- wähle jede der n Facette einmal als obere Facette
- für jede obere Facette löse ein 2-dim. LP mit n Nebenbedingungen

Ziel im Folgenden

- schnellerer Algo für das Lösen 2-dimensionaler LPs

Finde die optimale Lösung

maximiere: $x_1 + x_2$

sodass: $x_1 \geq 0$ (P)

$x_2 \geq 0$ (A)

$x_2 - x_1 \leq 1$ (U)

$x_1 + 6x_2 \leq 15$ (S)

$4x_1 - x_2 \leq 10$ (E)

2D LPs

Beispiel

maximiere: $x_1 + x_2$

sodass: $x_1 \geq 0$

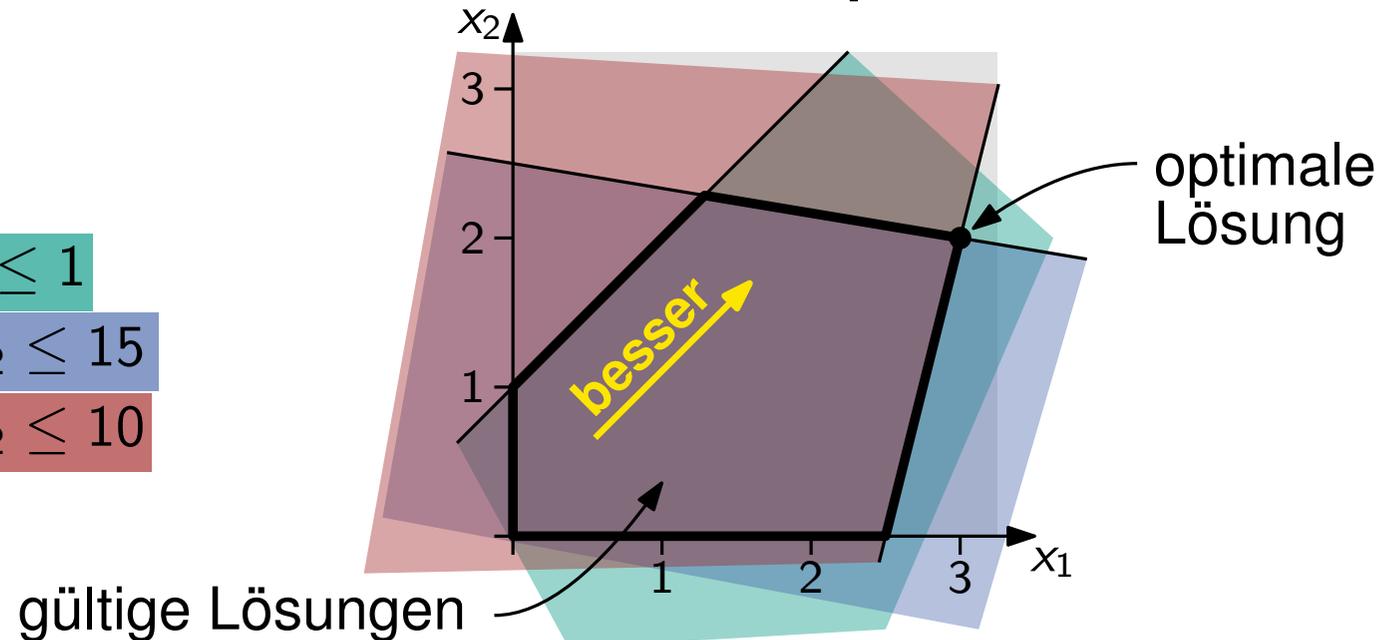
$x_2 \geq 0$

$x_2 - x_1 \leq 1$

$x_1 + 6x_2 \leq 15$

$4x_1 - x_2 \leq 10$

Geometrische Interpretation



Lösbarkeit

- LP ist **unlösbar (infeasible)**, wenn es keine gültige Lösung gibt
- LP ist **unbeschränkt (unbounded)**, wenn es beliebig gute gültige Lösungen gibt (Optimierungsfunktion wird beliebig groß)

Problem: Schnitt von Halbebenen

Gegeben n Halbebenen, berechne den Schnitt dieser Halbebenen.

Schnitt von Halbebenen

Plan: Teile und herrsche

- teile Halbebenen in etwa gleich große Teilmengen
- berechne Schnitt für jede der Teilmengen
- berechne Schnitt der zwei resultierenden Regionen

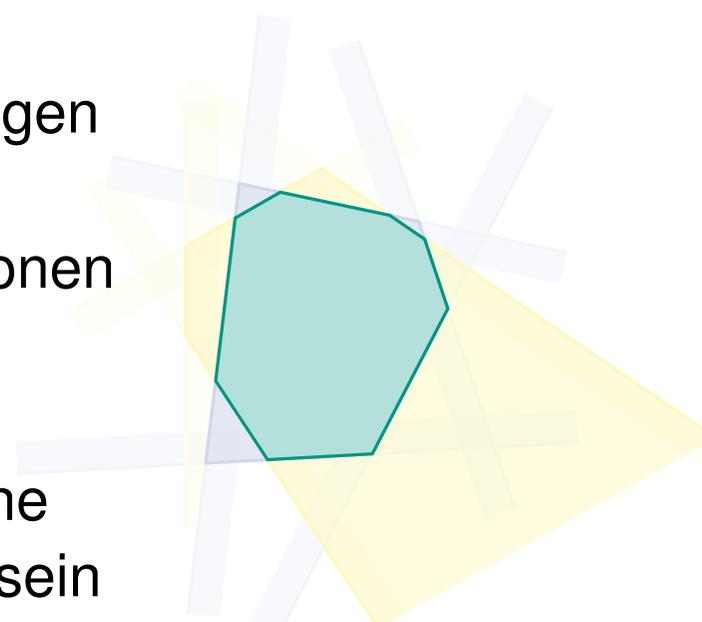
Berechnung des Schnitts

- im Prinzip der Schnitt zweier konvexer Polygone
- Unterschied: Regionen können unbeschränkt sein
- Sweep-Line Algorithmus kann entsprechend angepasst werden
 - Laufzeit $O(n \log n)$ **Warum nicht $O((n + k) \log n)$?**
- Ausnutzung der Konvexität beim Schnitt → Laufzeit $O(n)$

Gesamtlaufzeit: $T(n) = O(n) + 2T(n/2) \Rightarrow O(n \log n)$

Geht es besser?

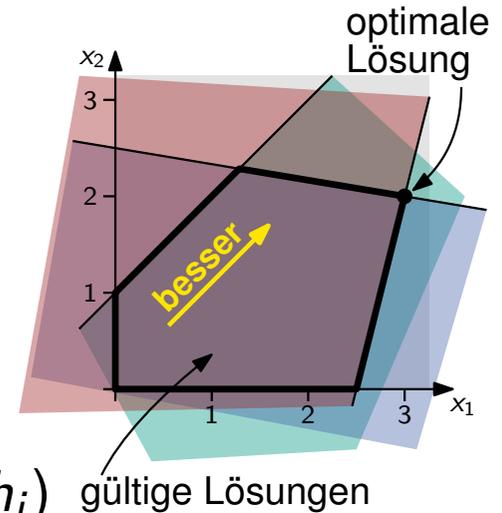
- verwandt zur Berechnung der Konvexen Hülle (via Dualität)
- untere Schranke: $\Omega(n \log n)$



Inkrementeller Algorithmus für 2D LPs

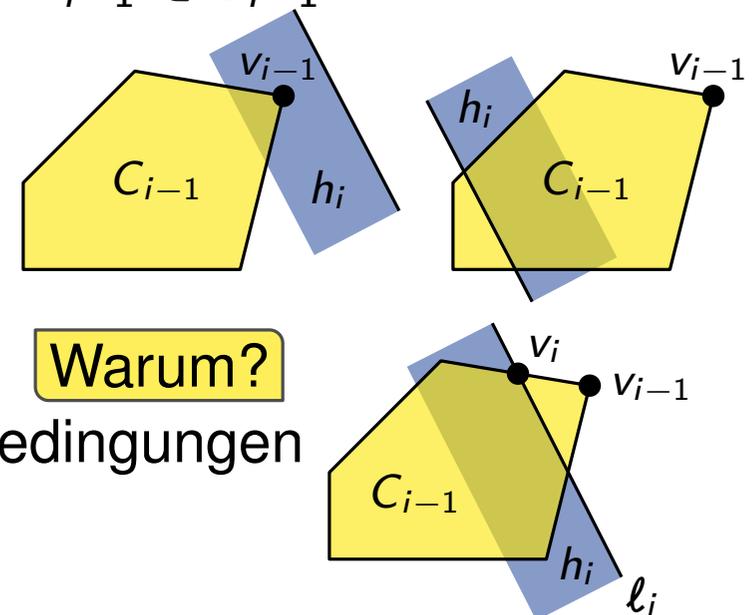
Beobachtung

- wir müssen die gültige Region nicht explizit berechnen
- es genügt ein gültiger Punkt, der die Zielfunktion maximiert



Inkrementeller Ansatz

- seien h_1, \dots, h_n die Halbebenen (Nebenbedingungen)
- sei $C_i = h_1 \cap h_2 \cap \dots \cap h_i$ (gültige Region bzgl. h_1, \dots, h_i)
- Annahme: wir kennen einen optimalen Punkt $v_{i-1} \in C_{i-1}$
- Ziel: finde optimalen Punkt $v_i \in C_i$
- Fall 1: $v_{i-1} \in C_i$
 - v_{i-1} ist auch optimal in C_i (da $C_i \subseteq C_{i-1}$)
- Fall 2: $v_{i-1} \notin C_i$
 - v_i liegt auf der Begrenzungslinie ℓ_i von h_i **Warum?**
 - das ist im Prinzip ein 1D LP mit i Nebenbedingungen
 - können wir in $O(i)$ Zeit lösen **Wie?**



Inkrementeller Algorithmus für 2D LPs

Offene Fragen

- Wie fangen wir an?
- Was interessiert uns ein $O(n^2)$ Algorithmus?

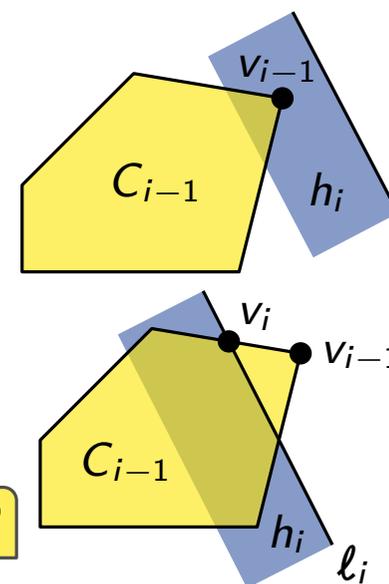
Wie fangen wir an?

- Problem: zu Beginn ist die gültige Region C_0 unbeschränkt
- einen „optimalen Punkt“ gibt es nicht
- ggf. ist sogar C_n unbeschränkt → nicht nur zu Beginn problematisch
- Lösung: siehe Übung

Was interessiert uns ein $O(n^2)$ Algorithmus?

- Fall $v_{i-1} \in C_i$ ist billig (setze einfach $v_i = v_{i-1}$)
- Fall $v_{i-1} \notin C_i$ ist teuer ($O(i)$ zur Berechnung von v_i)
- Hoffnung: $v_{i-1} \notin C_i$ tritt nur selten ein
- es gibt Ordnung h_1, \dots, h_n , sodass $v_{i-1} \in C_i$ für $i \geq 3$
- diese Ordnung finden ist nicht so einfach
- aber: die meisten Ordnungen sind gut → zufällige Ordnung

Warum?



Randomisierter inkrementeller Algorithmus

Erwartete Laufzeit

- die Laufzeit ist eine Zufallsvariable (im Folgenden mit X bezeichnet)
- weitere Zufallsvariablen: X_i ist die Laufzeit in Iteration i
- dann gilt:

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \Rightarrow \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i]$$

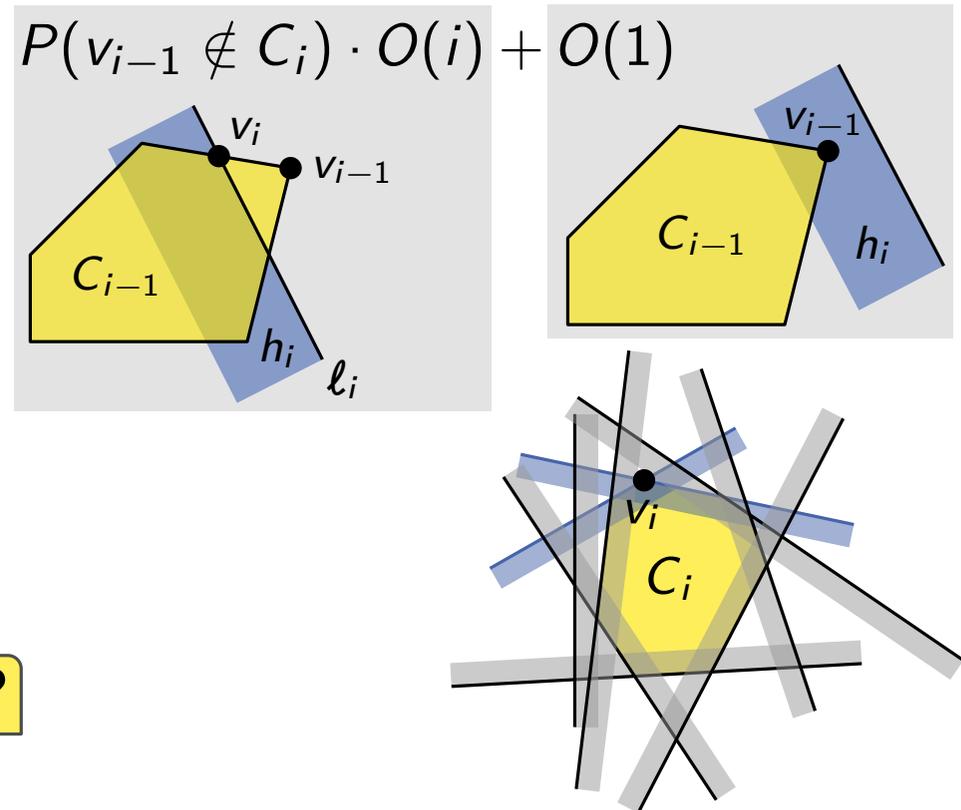
Erwartete Zeit in Iteration i : $\mathbb{E}[X_i] = P(v_{i-1} \notin C_i) \cdot O(i) + O(1)$

Was ist $P(v_{i-1} \notin C_i)$?

- es gilt: $v_{i-1} \notin C_i \Leftrightarrow v_i \neq v_{i-1}$
- umgekehrte Betrachtungsweise
 - gehe von C_i zu C_{i-1} (entferne h_i)
 - dann gilt: $v_{i-1} \neq v_i \Rightarrow \ell_i$ ist eine der zwei Geraden, die v_i enthält
 - Wahrscheinlichkeit dafür: $\frac{2}{i}$

■ also: $P(v_i \neq v_{i-1}) \leq \frac{2}{i}$ **Warum \leq ?**

$\Rightarrow \mathbb{E}[X_i] \in O(1) \Rightarrow \mathbb{E}[X] \in O(n)$



Zusammenfassung

Heute gesehen

- Berechnung einer 3D-Gussform → Formulierung als 2D-LP
- 2D-LP → Formulierung als Schnitt von Halbebenen
- Berechnung des Schnitts von Halbebenen: $O(n \log n)$ -Algorithmus
- Lösung eines 2D-LPs: randomisierter Algo mit erwarteter Laufzeit $O(n)$

Was gibt es sonst noch?

- randomisierte Algo für 2D-LPs funktioniert auch für höhere Dimensionen
 - Laufzeit: weiterhin erwartet $O(n)$, wenn d konstant
 - wächst superexponentiell in d
- diese Art der Randomisierung funktioniert für viele geometrische Probleme