Karlsruher Institut für Technologie

Die Komplexität der Fahrzeugzuweisung mit Haltekosten

Bachelorarbeit von

Yannick Weiser

an der Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik (ITI)

Erstgutachter:	T.T.-Prof. Dr. Thomas Bläsius
Zweitgutachter:	Dr. rer. nat. Torsten Ueckerdt
Betreuer:	Adrian Feilhauer
	Michael Zündorf

15.08.2025 – 15.01.2026

Karlsruher Institut für Technologie
Fakultät für Informatik
Postfach 6980
76128 Karlsruhe

Ich versichere wahrheitsgemäß, die Arbeit selbstständig verfasst, alle benutzten Quellen und Hilfsmittel vollständig und genau angegeben und alles kenntlich gemacht zu haben, was aus Arbeiten anderer unverändert oder mit Abänderungen entnommen wurde sowie die Satzung des KIT zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis in der jeweils gültigen Fassung beachtet zu haben.

Karlsruhe, 15.01.2026

. . . .

(Yannick Weiser)

Zusammenfassung

Ein breit angenommenes öffentliches Verkehrsangebot ist ein wichtiger Baustein zur Reduktion zukünftiger Klimaschäden. Ein solches Verkehrsangebot sollte die Bedürfnisse der Verkehrsteilnehmer abdecken, aber gleichzeitig auch eine möglichst geringe Belastung für unser Klima darstellen. Es bietet sich an die Suche nach einem solchen Verkehrsangebot in zwei Schritte aufzuteilen. Zuerst gilt es für die einzelnen Verkehrsteilnehmer Routen zu bestimmen, die möglichst geeignet sind, um gemeinsam gefahren zu werden. Dann muss im zweiten Schritt eine möglichst effiziente Bedienung der Routen ermittelt werden. Zur Effizienz eines Verkehrsystems gehört aber nicht nur die Fahrtstrecke, die Fahrzeuge insgesamt zurücklegen. Auch Haltestellen, an denen viele Verkehrsteilnehmer umsteigen, verursachen einen großen zeitlichen Mehraufwand. Müssen Verkehrsteilnehmer häufiger umsteigen, kann das Verkehrsystem also weniger seiner eigentlichen Aufgabe nachgehen: dem Transport. Es liegt somit im Interesse der Effizienz, dass Fahrzeuge möglichst selten halten.

Zur Bestimmung eines möglichst effizienten Verkehrssystems zu gegebenen Routen führen wir das graphentheoretische Optimierungsproblem Fahrzeugzuweisung mit Haltekosten ein. Wir entwickeln einen optimalen Linearzeitalgorithmus für gerichtete Pfade. Weiter zeigen wir Eigenschaften von optimalen Lösungen auf einer Einhals-Spinnne – eine Einschränkung von Bäumen. Außerdem entwickeln wir einen optimalen Polynomialzeitalgorithmus für Instanzen, in denen sich immer nur die Routen von zwei Reisenden gleichzeitig berühren. Auch für eine Problemvariante, in der ein Reisender insgesamt nur mit einem anderen Reisenden ein Fahrzeug teilen darf, stellen wir einen optimalen Polynomialzeitalgorithmus vor. Zur Lösung allgemeiner Probleminstanzen entwickeln wir eine ILP-Formulierung des Problems Fahrzeugzuweisung mit Haltekosten. Außerdem zeigen wir auf, dass einige Eigenschaften, die für die Konstruktion eines greedy Algorithmus hilfreich wären, nicht gelten.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

In der heutigen Zeit ist das Thema Klimawandel und notwendige Maßnahmen zur Begrenzung der Klimaschäden hochrelevant. So auch im Sektor Verkehr – Stichwort Verkehrswende. Eine Möglichkeit zur Reduktion der Klimaschäden ist die Abwendung vom aktuell gelebten Individualverkehr. Anstatt auf das eigene Automobil könnten wir als Gesellschaft auf multimodale Transportsysteme im Sinne von klassischem ÖPNV aber auch von Carsharing-Angebote zurückgreifen [CW16].

In bisherigen Arbeiten wird meist nur das Teilen von Taxifahrten zwischen verschiedenen Verkehrsteilnehmern untersucht [MZW13 | San+14 | Alo+17 | BSW]. Allerdings ist das Problem die totale Fahrzeit für alle Reisende zu minimieren NP-vollständig [BSW]. Deshalb beruhen die Algorithmen zur Berechnung einer akzeptablen Lösung meist auf einem Online-Ansatz [BSW]. Anfragen werden einzeln bearbeitet und zu möglichst guten Lösungen zusammengesetzt [BSW].

Als ein möglicher Ansatz zur Bestimmung einer ganzheitlichen Lösung, die über einzelne Anfragen hinausgeht, bietet sich die Unterteilung des Problems in zwei Schritte an. Zuerst werden aus dem Verkehrsbedarf für die einzelnen Verkehrsteilnehmer Routen mit möglichst hohem Sharing-Potential berechnet. Dann können wir aus den konkreten Routen der Reisenden Fahrten bestimmen, um allen Bedarf abzudecken. Für den ersten Schritt entwickeln Bläsius et al. [Blä+25] einen spieltheoretischen Ansatz im Paper „Synergistic Traffic Assignment“. Mit dieser Arbeit betrachten wir den zweiten Schritt, zu den vorgegebenen Fahrtstrecken von Verkehrsteilnehmern Fahrzeuge zu finden.

Wir wollen ermöglichen, dass Reisende anders als in der Betrachtung von Taxirouten nicht immer an das gleiche Fahrzeug gebunden sind. Stattdessen sollen Reisende verschiedene Fahrzeuge verwenden können. Dafür müssen sie die Fahrzeuge wechseln können. Halte an Station verursachen allerdings oft eine signifikante Verlängerung der Reisezeit und dadurch eine geringere Effizienz des Transportsystems [ZSL17]. Deswegen betrachten wir zur Bewertung der Operationskosten nicht nur die Fahrtzeiten aller Fahrzeuge, sondern auch die gesamte Anzahl der Halte aller Fahrzeuge.

Konkret führen wir das Problem *Fahrzeugzuweisung mit Haltekosten* ein. Die bestehende Infrastruktur, in der Fahrzeuge operieren können, bildet einen Graphen. Das kann zum Beispiel ein Straßen- oder Schienennetz sein. Verkehrsknotenpunkte bilden die Knoten des Graphen und die Verbindungen zwischen Verkehrsknotenpunkte wie Straßen bilden die Kanten. Da ein Verkehrsfluss von einem Start zu einem Zielverläuft, modellieren wir die Kanten gerichtet. Damit können wir auch zum Beispiel Einbahnstraßen korrekt beschreiben. Wie bereits disskutiert, gehen wir davon aus jede Reisende einer festen Routen im Verkehrsnetz folgen möchte. Diese Routen modellieren wir als Pfade im Graphen. Wir suchen nun ein Verkehrssystem, mit dem alle Reisenden ihr Ziel erreichen. Deshalb suchen wir eine Menge an Fahrzeugen, die den Verkehrsbedarf bedienen kann. Jedes Fahrzeug deckt ein Stück der Routen der Reisenden ab, sodass insgesamt jeder Reisender seine Routen befahren kann. Da ein Reisender auch mehrere Fahrzeuge nutzen kann, um sein Ziel zu erreichen, müssen Fahrzeuge anhalten, damit Reisende umsteigen können.

Als Modellierung eines Verkehrsbedarfs interessiert uns aber nicht eine beliebige Zuordnung, sondern ein möglichst billige. Ob aus Nachhaltigkeitsgründen oder auch aufgrund von Operationskosten. Deshalb suchen wir die Lösung, die die gesamte Fahrtzeit aller Fahrzeuge gemeinsam mit der benötigten Anzahl Halte der Fahrzeuge minimiert. Denn ein Halt eines Fahrzeugs bedeutet eine Verschlechterung der Effizienz des Verkehrssystems. Um diese Verschlechterung zu quantifizieren führen wir globale Kosten für jeden Halt ein.

Teilen sich zwei Reisende eine Strecke, sodass beide mit demselben Fahrzeug fahren könnten, ist es naheliegend anzunehmen, dass diese auch im selben Fahrzeug fahren sollten. Allerdings zeigen wir, dass das nicht immer der Fall ist. Ebenso ist es naheliegend, dass Reisende möglichst lange Strecken verbringen sollten. Insbesondere sollte möglichst wenig Strecke von mehreren Fahrzeugen befahren werden, wenn diese für Umstiege anhalten. Und dennoch zeigen wir, dass es nicht immer optimal ist, bei einer Zusammenfahrt die maximal geteilte Strecke im selben Fahrzeug zu fahren.

Für jedes weitere Fahrzeug, das für Umstiege halten muss, entstehen höhere Kosten. Daher ist es naheliegend, dass wenige Reisende reichen, um zu bewerten, ob eine Zusammenfahrt lohnenswert ist. Aber wir zeigen, dass es im Allgemeinen nicht reicht eine beschränkte Anzahl an Reisenden zu betrachten, um das zu bewerten.

Wir entwickeln einen linearen, optimalen Algorithmus für gerichtete Pfade. Weiter zeigen wir einige Eigenschaften einer optimalen Lösung auf Einhals-Spinnen. Mit diesen Eigenschaften reduzieren wir die Existenz eines polynomiellen Algorithmus für Einhals-Spinnen auf das von uns definierte Problem *Gruppenzusammenfahrt*. Das Problem GRUPPENZUSAMMENFAHRT untersucht auf Einhals-Spinnen für Situationen, in denen bereits einige Reisende zusammenfahren – von uns Gruppen genannt –, wie die Gruppen im Problem FAHRZEUGZUWEISUNG MIT HALTEKOSTEN optimal zusammenfahren. Außerdem stellen wir dar, dass das Problem FAHRZEUGZUWEISUNG MIT HALTEKOSTEN auf Out-Trees nicht durch direktes mehrmaliges Berechnen einer optimalen Lösung von Spinnen gelöst werden kann.

Zusätzlich geben wir einen polynomiellen Algorithmus für Einzel-Haushalte an. In einem Einzel-Haushalt sind alle Starts und Enden der Reisenden verschieden und es begegnen sich immer nur zwei Reisende gleichzeitig. Außerdem stellen wir einen polynomiellen Algorithmus für die Problemvariante *Fahrzeugzuweisung mit Haltekosten und paarweiser Zusammenfahrt* durch Reduktion auf das Problem MAXIMUM WEIGHT MATCHING vor. In der Problemvariante FAHRZEUGZUWEISUNG MIT HALTEKOSTEN und paarweiser Zusammenfahrt darf ein Reisender zusätzlich nur mit einem anderen Reisenden im selben Fahrzeug fahren.

Mit einer ILP-Formulierung geben wir noch ein Lösungsverfahren für allgemeine Instanzen des Problems FAHRZEUGZUWEISUNG MIT HALTEKOSTEN an.

Gliederung

Im Kapitel 3 beschäftigen wir uns mit der formalen Problemdefinition. Danach zeigen wir in Kapitel 4, dass einige lokale Eigenschaften nicht gelten. In Abschnitt 5.1 stellen wir einen linearen Algorithmus für gerichtete Bäume vor. Weiter zeigen wir in Abschnitt 5.2 Struktureigenschaften einer optimalen Lösung auf Einhals-Spinnen. Damit stellen wir eine Algorithmusidee vor, die wir auf das Problem GRUPPENZUSAMMENFAHRT reduzieren. Das Problem GRUPPENZUSAMMENFAHRT stellen wir in Abschnitt 5.2.4 detaillierter vor. In Abschnitt 5.3 zeigen wir, dass aus einem Algorithmus für Einhals-Spinnen nicht direkt ein Algorithmus für Out-Trees konstruiert werden kann. In Kapitel 6 stellen wir einen polynomiellen Algorithmus auf Einzelhaushalten vor. Weiter präsentieren wir in Kapitel 7 einen polynomiellen Algorithmus für die Problemvariante Fahrzeugzuweisung mit Haltekosten und paarweiser Zusammenfahrt. Zuletzt konstruieren wir in Kapitel 8 eine Formulierung unseres Problems als ILP.

2. Präliminarien

Ein *Graph* $G = (V, E)$ besteht aus einer endlichen Menge an Knoten und einer Menge an Kanten zwischen diesen Knoten.

Bei einem *gerichteten* Graphen besteht die Kantenmenge aus Knotenpaaren $E \subseteq V^2$. Eine Kante verläuft vom ersten zum zweiten Knoten des Paars.

Bei einem *ungerichteten* Graphen besteht die Kantenmenge aus zwei-elementigen Teilmengen der Kantenmenge $E \subseteq \binom{V}{2}$.

Die *Kantenzahl* eines Graphen G ist $\|G\| := |E|$.

Der *Grad eines Knotens* $\deg(v)$ ist die Anzahl inzidenter Kanten. Das heißt, die Anzahl an Kanten $e \in E$, sodass ein weiterer Knoten $w \in V$ existiert mit $e = (v, w)$ oder $e = (w, v)$.

Die *Vereinigung* zweier Graphen $G = (V_G, E_G)$ und $H = (V_H, E_H)$ besteht aus den Knoten und Kanten der beiden Graphen. Es gilt $G \cup H = (V_G \cup V_H, E_G \cup E_H)$.

Ein *gewichteter* Graph $G = (V, E, c)$ besteht zusätzlich aus einer Kostenfunktion c, die jeder Kante ein Gewicht zuweist.

Ein *Kantenzug* ist eine endliche Folge an Knoten $(v_0, \ldots, v_n)$. Jeweils zwei aufeinanderfolgende Knoten sind mit einer Kante verbunden. Das heißt, für alle i aus $\{0, \ldots, n-1\}$ liegt (v_i, v_{i+1}) in E.

Ein *Pfad* ist ein Kantenzug, in dem kein Knoten mehrfach vorkommt. Einen Pfad $p = (v_0, \ldots, v_n)$ bezeichnen wir auch als v_0, v_n-Pfad.

Die *Konkatenation* $p \circ q$ von Pfaden p und q ist ein Pfad aus den Knoten der beiden Pfade. Der letzte Knoten von p muss mit dem ersten Knoten von q übereinstimmen. Formal: Sei $p = (p_1, \ldots, p_k)$, $q = (q_1, \ldots, q_n)$ mit $p_k = q_1$. Dann ist $p \circ q = (p_1, \ldots, p_k, q_2 \ldots, q_n)$.

Ein *(gerichteter) Pfadgraph* ist ein Graph dessen Knoten in einem Pfad ausgerichtet sind. Das heißt, es gibt einen Pfad der jede Kante des Graphen besucht und jeden Knoten genau einmal enthält.

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *zusammenhängend*, wenn für alle Knotenpaare $v, w \in V$ ein Pfad ohne Beachtung der Richtung der Kanten existiert. Formal heißt das, dass es für alle Knontenpaare $v, w \in V$ ein endliche Folge an Knoten $(v = v_0, \ldots, w = v_n)$ existiert mit (v_i, v_{i+1}) oder (v_{i+1}, v_i) in E.

Ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ ist ein *Baum*, wenn $|E| = |V| - 1$ gilt.

Eine *Spinne* ist ein Baum mit höchstens einem Knoten v von Grad größer 2. Diesen Knoten v nennen wir *Abspaltungspunkt*. Anschaulich handelt es sich um eine Sammlung an Pfaden, die am Abspaltungspunkt sternförmig verschmolzen sind.

Ein *Out-Tree* ist ein Baum mit einem Knoten v, sodass für jeden Knoten u ein v, u-Pfad gibt.

3. Problemdefinition

In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir das Optimierungsproblem *Fahrzeugzuweisung mit Haltekosten*. Eine Probleminstanz besteht aus einem gerichteten und gewichteten Graphen $G = (V, E, c)$ mit nicht-negativen Kantengewichten, einer endlichen Menge Reisender R sowie positiven skalaren Haltekosten α. Eine Lösung besteht aus einer Menge an Fahrzeugen F und einer Zuweisung der Reisenden zu Fahrzeugen ζ. Die zu optimierenden Kosten sind gegeben als Gesamtoperationszeit zuzüglich der Halte gewichtet mit den Haltekosten.

Jeder Reisende $r \in R$ ist gegeben durch einen Pfad p_r im Graphen G. Es bezeichne $\cup R$ die Vereinigung aller Reisendenstrecken $\bigcup_{r \in R} p_r$ als Teilgraph von G. Weiter bezeichne E_R die Kanten mit dem jeweiligen Reisenden. Das heißt $E_R \coloneqq \bigcup_{r \in R}\{(r, e) \mid e \text{ in } p_r\}$.

Jedes Fahrzeug $f \in F$ ist gegeben durch einen Pfad im Graphen G, der erschöpfend in Teilpfade gegliedert ist. Einen solchen Teilpfad nennen wir Relation. Die Konkatenation aller Relationen muss gerade den Pfad des Fahrzeugs ergeben. Insbesondere stimmt das Ende einer Relation mit dem Start der darauffolgenden Relation überein. Jeden Start und jedes Ende einer Relation nennen wir *Halt*. Es beschreibe $\operatorname{rel}(f)$ die Menge aller Relationen des Fahrzeugs f.

Die Zuweisung der Reisenden zu Fahrzeugen ist gegeben durch eine Funktion von Reisenden und Kanten zu Fahrzeugen $\zeta \colon E_R \to F$. In der Situation $\zeta(r, e) = f$ sagen wir, das Fahrzeug f bedient Reisenden r an Kante e. Aber auch Reisender r fährt an Kante e in Fahrzeug f. Legt ein Reisender zwei aufeinanderfolgende Kanten im selben Fahrzeug zurück, müssen die Kanten auch in dem Fahrzeug aufeinanderfolgen oder der Knoten dazwischen ein Halt sein. Legt ein Reisender zwei aufeinanderfolgende Kanten in verschiedenen Fahrzeugen zurück, muss der Knoten dazwischen ein Halt sein. Das heißt, dass das Fahrzeug für die vordere Kante und das Fahrzeug für die hintere Kante beide an diesem Knoten halten. Einen solchen Fahrzeugwechsel nennen wir *Umstieg*.

Die Gesamtoperationszeit ergibt sich aus den Kosten der befahrenen Kanten. Wir erhalten also für die Gesamtoperationszeit

$$T = \sum_{f \in F} \sum_{e \in f} c(e).$$

Für die Halte wird der Knoten zwischen zwei aufeinanderfolgenden Pfaden eines Fahrzeugs jeweils nur einmal gezählt. Es folgt, dass die Anzahl der Halte eines Fahrzeugs $f \in F$ gerade der Anzahl seiner Pfade plus 1 entspricht: Start und Ende sowie die Knoten zwischen den Pfaden. Wir erhalten somit für die Anzahl Halte

$$h = \sum_{f \in F} (|\operatorname{rel}(f)| + 1).$$

Es folgt für die gesamten Kosten

$$\hat{c} = T + \alpha \cdot h = \sum_{f \in F} \sum_{e \in f} c(e) + \alpha \sum_{f \in F} (|\operatorname{rel}(f)| + 1).$$

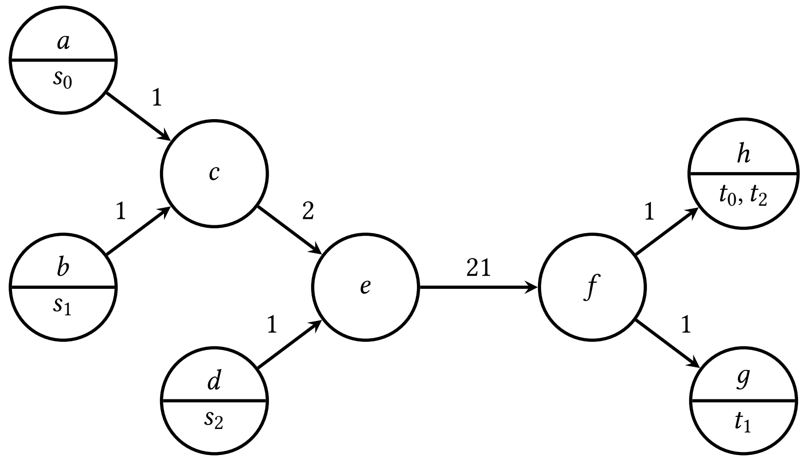

Abbildung 3.1.: Ein Graph, der einen einfachen Verkehrsbedarf abbildet. Jeder Knoten ist mit einem Namen beschrieben. Zusätzlich geben wir für jeden Reisenden r_i für $i \in \{0, 1, 2\}$ mit s_i seinen Start und mit t_i sein Ziel an. Die drei Reisenden verfolgen den einzigen möglichen Pfad von ihrem Start zu ihrem Ziel.

Gegeben eine Lösung L einer Instanz I lässt sich leicht in polynomieller Zeit überprüfen, ob es sich um eine gültige Lösung handelt. Außerdem ist der Wert der Lösung L nach obiger Formel in Linearzeit berechenbar. Demzufolge liegt das Problem Fahrzeugzuweisung mit Haltekosten beziehungsweise das zugehörige Entscheidungsproblem in NP.

In Abbildung 3.1 finden wir eine grafische Repräsentation einer einfachen Probleminstanz. Neben einem Namen zur besseren Identifizierbarkeit tragen einige Knoten noch die Angaben s_i bzw. t_i für i in $\{0, 1, 2\}$. Mit s_i bezeichnen wir den Start- und mit t_i den Endpunkt der Strecke des Reisenden r_i. Die restliche Strecke der Reisenden ergibt sich in diesem Beispiel bereits aus dem Graphen. Reisender r_0 zum Beispiel folgt dem Pfad (a, c, e, f, h). Die Zahlen an den Kanten geben die Zeit an, die es dauert die Kante zu befahren. So benötigt ein Fahrzeug für die Strecke von Reisendem r_0 insgesamt $1 + 2 + 21 + 1 = 25$ Zeiteinheiten.

Setzen wir die Haltekosten auf 5, erhalten wir die folgende optimale Lösung: Reisender r_0 fährt in einem Fahrzeug von a bis e, dann steigen die Reisenden r_1 und r_2 dazu. Die beiden sind auch jeweils in einem eigenen Fahrzeug bis zu Knoten e gefahren. Zusammen fahren sie die eine Kante bis Knoten f, wo Reisender r_1 für die Kante zu seinem Ziel wieder in ein eigenes Fahrzeug steigt. Reisende r_0 und r_2 bleiben weiter im selben Fahrzeug und fahren zu ihrem Ziel h. Dabei halten Fahrzeuge insgesamt 10 Mal: Das Fahrzeug, in dem r_0 die ganze Strecke fährt, hält an a, e, f und h – Start von r_0, Zustiegspunkt, Umsteigepunkt von r_1, Ende von r_0 und r_2. Die eigenen Fahrzeuge zu e halten jeweils zweimal: einmal am Start der Reisenden und einmal an e. Zuletzt hält das Fahrzeug, das Reisenden r_1 zu seinem Ziel bringt, noch weitere zweimal: an f und dem Ziel g. Damit erhalten wir $5 \cdot 10$ Kosten für die Halte und insgesamt einen Aufwand von

$$(5 \cdot 10) + (1 + 2 + 21 + 1) + (1 + 2) + 1 + 1 = 80.$$

4. Unzureichende lokale Eigenschaften

In diesem Kapitel untersuchen wir Eigenschaften, anhand derer sich lokal Entscheidungen treffen ließen. Mit Gegenbeispielen zeigen wir auf, dass diese Eigenschaften nicht auf allgemeine Probleminstanzen anwendbar sind.

4.1. Präfix ist Suffix

Eine solche Eigenschaft finden wir in Abbildung 4.1. Der Pfad des Reisenden r_1 beinhaltet als Präfix ein Suffix des Pfads des Reisenden r_0. Fahren die beiden Reisenden also im selben Fahrzeug, benötigen wir nur vier Halte, denn keiner muss umsteigen. Gleichzeitig befahren wir die geteilte Strecke, in diesem Fall die Kante (b, c), nur einmal. Fahren die zwei Reisenden stattdessen in verschiedenen Fahrzeugen, benötigen wir immer noch vier Halte, müssen den geteilten Teil jetzt allerdings zweimal befahren. Entsprechend lässt sich vermuten, dass in einem solchen Fall die zwei Reisenden immer im selben Fahrzeug fahren müssen. Später werden wir in Lemma 5.7 auch eine Variante dieser Aussage zeigen.

Allerdings dürfen wir nicht allgemein für alle Reisenden, auf die diese Situation zutrifft, folgern, dass diese im selben Fahrzeug fahren. Betrachte dazu Abbildung 4.2. In diesem Beispiel sehen wir einen dritten Reisenden. Die beiden Reisenden r_1 und r_2 konkurrieren um die einsparende Zusammenfahrt mit Reisendem r_0. Aufgrund der unterschiedlichen gemeinsamen Strecke lässt sich bei r_1 eine gemeinsame Strecke von 11 und bei r_2 hingegen nur eine gemeinsame Strecke von 1 sparen. Solange $\alpha > \frac{1}{2}$ lohnt es sich auch nicht alle drei Reisenden in einem Fahrzeug zu bedienen, weil es zwei Halte benötigt, damit r_1 und r_2 ab d verschiedene Strecken befahren können. Entsprechend fahren in einer optimalen Lösung r_0 und r_2 entgegen der Vermutung nicht zusammen.

4.2. Maximale Strecken

Eine weitere Eigenschaft ist: Wenn wir zusätzliche Halte aufwenden, sollten wir auch möglichst viel Strecke dafür teilen. Auch diese Eigenschaft findet sich leicht abgewandelt in späteren Aussagen dieser Arbeit wieder. Allerdings können wir wieder nicht nur anhand eines Reisendenpaars entscheiden, wie lange die Zusammenfahrt andauern soll. Betrachte die Instanz aus Abbildung 4.3. Dann teilt sich der Reisende r_1 jeweils mit den Reisenden r_0 und r_2 eine Strecke von 101. Setzen wir die Haltekosten α auf 5, so wissen wir, dass Reisender r_1 sich sowohl Strecke mit r_0 als auch mit Reisendem r_2 teilen sollte. Allerdings ist es nicht optimal, beide Reisende ihre maximale Strecke von 101 teilen zu lassen.

Lemma 4.1: *In dem Beispiel Abbildung 4.3 ist es nicht optimale, wenn Reisender r_0 die komplette geteilte Strecke mit r_1 und r_2 zusammenfährt.*

Beweis. Betrachte eine Lösung gegeben durch die Zusammenfahrt von r_1 mit r_0 und r_2 auf der kompletten geteilten Strecke. Aufgrund der Struktur der Instanz ist der Wert der Lösung dadurch bereits eindeutig bestimmt. Eine der möglichen Lösungen L lautet wie folgt: Wir benötigen drei Fahrzeugen $\hat{f}$, $\hat{g}$ und $\hat{h}$. Das Fahrzeug $\hat{f}$ befährt den Pfad (a, b, d, e, f) und hält

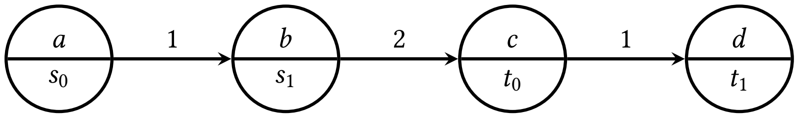

Abbildung 4.1.: Die Situation in Präfix ist Suffix: Ein Präfix des Reisenden r_1 ist Suffix des Reisenden r_0.

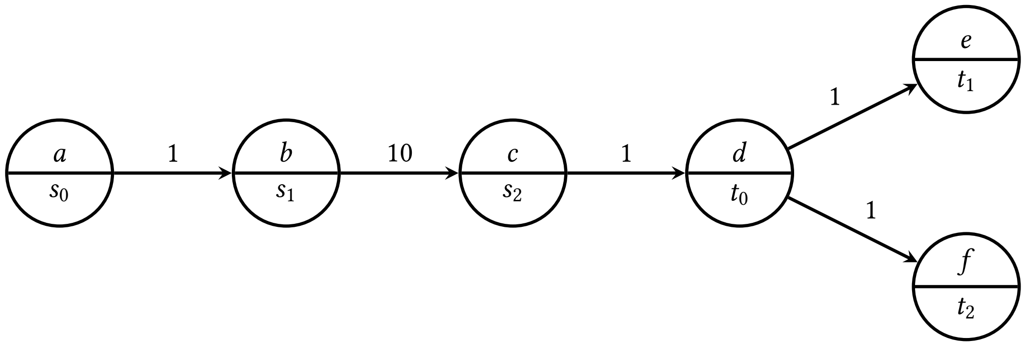

Abbildung 4.2.: Ein Gegenbeispiel für die Situation Präfix ist Suffix. Zwei Reisende r_1 und r_2 teilen sich jeweils ein Präfix mit einem Suffix von Reisendem r_0. Die Reisenden r_1 und r_2 befahren allerdings Strecken, sodass es sich für diese beide nicht lohnt zusammen zu fahren.

an jedem Knoten. Das Fahrzeug $\hat{g}$ befährt den Pfad (c, d) und hält an Start und Ende. Und das Fahrzeug $\hat{h}$ befährt den Pfad (e, g, h) und hält an jedem Knoten. Der Reisende r_0 fährt seine komplette Strecke in Fahrzeug $\hat{f}$. Reisender r_1 fährt bis Knoten e in Fahrzeug $\hat{f}$ und steigt dann für die restliche Strecke in Fahrzeug $\hat{h}$ um. Und Reisender r_2 beginnt seine Reise in Fahrzeug $\hat{g}$, steigt an d in Fahrzeug $\hat{f}$ und wechselt an e noch einmal zu Fahrzeug $\hat{h}$. Dann ergibt sich für diese Lösung der Wert

$$
\begin{aligned}
\hat{c}_L &= c((a,b)) + c((b,d)) + c((d,e)) + c((e,f)) + c((c,d)) + c((e,g)) + c((g,h)) + \alpha \cdot (5+2+3) \\
&= 1 + 100 + 1 + 1 + 1 + 100 + 1 + 10\alpha \\
&= 205 + 10 \cdot 5 = 255.
\end{aligned}
$$

Wandeln wir die Lösung stattdessen leicht ab, sodass nur r_0 die komplette Strecke mit r_1 gemeinsam fährt und r_2 nur die Kante mit Gewicht 100, erhalten wir die folgende Lösung L'. In L' benötigen wir nur zwei Fahrzeuge $\hat{f}$ und $\hat{g}$. Das Fahrzeug $\hat{f}$ befährt den Pfad (a, b, d, e, f) und hält an den Knoten a, b, e und f. Und das Fahrzeug $\hat{g}$ befährt den Pfad (c, d, e, g, h) und hält an den Knoten c, e, g und h. Der Reisende r_0 fährt wie in L seine komplette Strecke in Fahrzeug $\hat{f}$. Reisender r_1 fährt ebenfalls bis Knoten e in Fahrzeug $\hat{f}$ und steigt dann für die restliche Strecke in Fahrzeug $\hat{g}$ um. Und Reisender r_2 fährt seine komplette Strecke in Fahrzeug $\hat{g}$. Für die Lösung L' ergibt sich somit der Wert

$$
\begin{aligned}
\hat{c}_{L'} &= c((a,b)) + c((b,d)) + c((d,e)) + c((e,f)) + c((c,d)) + c((d,e)) + c((e,g)) + c((g,h)) + \alpha \cdot (4+4) \\
&= 1 + 100 + 1 + 1 + 1 + 1 + 100 + 1 + 8\alpha \\
&= 206 + 8 \cdot 5 = 246.
\end{aligned}
$$

Da $\hat{c}_{L'}$ kleiner als $\hat{c}_L$ ist, ist L somit nicht optimal. ∎

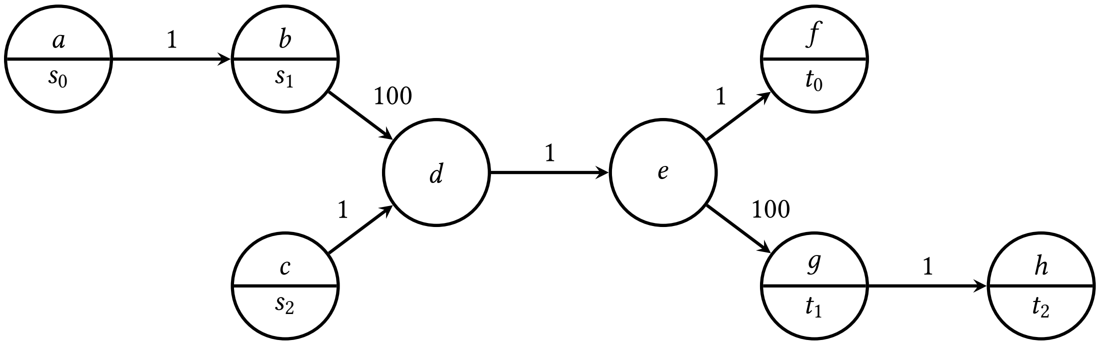

Abbildung 4.3.: Ein Gegenbeispiel für die Situation maximale Strecken. Die Reisenden r_0 und r_2 teilen sich jeweils eine Strecke von 101 mit dem Reisenden r_1. Aufgrund der Struktur ihrer Pfade ist es nicht optimal, dass r_0 und r_2 die komplette Strecke mit r_1 teilen.

4.3. Beschränkter Zusammenschluss

Je mehr Reisende in eine Zusammenfahrt involviert sind, desto teurer wird diese Zusammenfahrt potentiell. Denn für jedes verschiedene Fahrzeug, aus dem ein Reisender in ein gemeinsames Fahrzeug umsteigt, werden Halte benötigt. Und dennoch gibt es keine obere Schranke für die Anzahl an Reisenden, die betrachtet werden müssen, um zu bestimmen, ob ein Zusammenschluss lohnenswert ist. Betrachte zum Beispiel die Familie an Instanzen aus Abbildung 4.4. Dann erhalten wir für jedes $n \in \mathbb{N}^+$ eine Instanz I_n mit n Reisenden. Jeder Reisende bereist drei Kanten, wobei er sich nur die mittlere Kante teilt. Und das mit allen anderen Reisenden.

Lemma 4.2: *Fahren in einer Instanz I_n aus Abbildung 4.4 in einer optimalen Lösung manche der Reisenden zusammen, so fahren alle zusammen.*

Beweis. Die Aussage folgt aus einer einfachen Rechnung. Denn fahren m der Reisenden zusammen, entstehen für jeden der m Reisenden zwei neue Halte. Jeder Reisende muss an d in das gemeinsame Fahrzeug ein- und an e aus dem gemeinsamen Fahrzeug wieder aussteigen. Oder zumindest mit dem gemeinsamen Fahrzeug anhalten, damit die restlichen Reisenden umsteigen können. Dabei wird für jeden Reisenden, bis auf den, der im gemeinsamen Fahrzeug bleibt, einmal die Kante (d, e) gespart. Durch die Zusammenfahrt sparen wir also eine Operationszeit von

$$(m-1) \cdot c((d,e)) = (m-1) \cdot w.$$

Dafür müssen wir allerdings $2m$ zusätzliche Halte aufwenden. Die gesamten Kosten verbessern sich also durch die Zusammenfahrt um

$$b(m) := (m-1) \cdot w - 2m\alpha.$$

Lohnt sich die Zusammenfahrt für m Reisende, verschlechtern sich die gesamten Kosten durch die Zusammenfahrt nicht. Es gilt also $b(m) \geq 0$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} b(m) \geq 0 &\iff (m-1) \cdot w - 2m\alpha \geq 0 \\ &\iff (m-1) \cdot w \geq 2m\alpha \\ &\Rightarrow w > 2\alpha. \end{aligned}$$

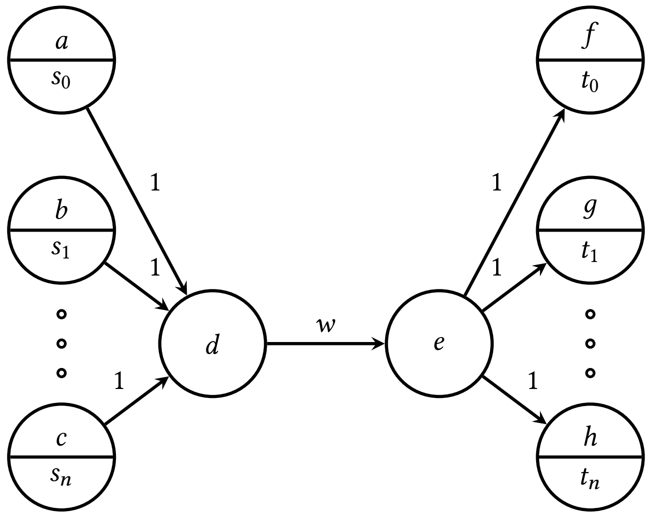

Abbildung 4.4.: Eine Instanzfamilie als Gegenbeispiel für die Betrachtung einer beschränkten Menge an Reisenden für eine Zusammenfahrt. Für jedes $n \in \mathbb{N}^+$ erhalten wir eine Instanz I_n, in der n Reisende in einem Graphen fahren. Der Pfad jedes Reisenden besteht aus drei Kanten. Alle Reisenden teilen sich die mittlere ihrer drei Kanten. Für jedes $m \in \mathbb{N}^+$ gibt es eine Wahl von w in Abhängigkeit von α, sodass eine Zusammenfahrt in den Instanzen mit n kleiner m nicht optimal ist, für n mindestens m aber optimal ist.

Leiten wir b nach m ab, erhalten wir

$$w - 2\alpha.$$

Da sich die Zusammenfahrt für m lohnt, ist b somit eine streng monoton steigende Funktion in m. Somit folgt die Aussage. ∎

Lemma 4.3: *Für jedes $m \in \mathbb{N}^+$, $m > 2$ gibt es eine Wahl von w in Abhängigkeit von α, sodass eine Zusammenfahrt aller Reisenden in einer Instanz I_n aus Abbildung 4.4 genau dann optimal ist, wenn n nicht kleiner als m ist.*

Beweis. Zunächst halten wir fest, dass eine Zusammenfahrt aller Reisenden in einer Instanz I_k, den Wert der Lösung der Instanz I_k im selben Maße ändertn wie die Zusammenfahrt von k Reisenden in einer Instanz I_n mit $n \geq k$. Denn in beiden Fällen fahren dadurch k Reisende zusammen. Wissen wir also für ein $m \in \mathbb{N}^+$, dass in einer optimalen Lösung von I_m, alle Reisenden zusammenfahren, lohnt es sich auch in einer Lösung I_n mit $n \geq m$, dass m Reisende zusammenfahren. Mit Lemma 4.2 fahren in der optimalen Lösung von I_n dann auch alle Reisenden zusammen. Somit folgt, dass es reicht zu zeigen, dass es für jedes $m \in \mathbb{N}^+, m > 2$ eine Wahl von w gibt, sodass sich die Zusammenfahrt für m lohnt, aber nicht für $m - 1$.

Sei nun $m \in \mathbb{N}^+$. Wir setzen

$$w = 2\alpha \frac{m \cdot (m-2) + \frac{1}{2}}{(m-1) \cdot (m-2)}.$$

Aus dem Beweis von Lemma 4.2 wissen wir, dass sich die Kosten durch die Zusammenfahrt von n Reisenden um

$$b(n) = (n-1) \cdot w - 2n\alpha$$

verringert. Eingesetzt ergibt das für m:

$$\begin{aligned}
b(m) = (m-1) \cdot w - 2m\alpha = (m-1) \cdot 2\alpha \frac{m \cdot (m-2) + \frac{1}{2}}{(m-1) \cdot (m-2)} - 2m\alpha \\
&= 2\alpha \frac{m \cdot (m-2) + \frac{1}{2}}{m-2} - 2m\alpha \\
&> 2\alpha \frac{m \cdot (m-2)}{m-2} - 2m\alpha \\
&= 2m\alpha - 2m\alpha \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Und für $m-1$ ergibt es

$$\begin{aligned}
b(m-1) = (m-2) \cdot w - 2(m-1)\alpha = (m-2) \cdot 2\alpha \frac{m \cdot (m-2) + \frac{1}{2}}{(m-1) \cdot (m-2)} - 2(m-1)\alpha \\
&= 2\alpha \frac{m \cdot (m-2) + \frac{1}{2}}{m-1} - 2(m-1)\alpha \\
&= 2\alpha \frac{(m-1) \cdot (m-2)}{m-1} + 2\alpha \frac{m-2+\frac{1}{2}}{m-1} - 2(m-1)\alpha \\
&= 2(m-2)\alpha + 2\alpha \frac{m-2+\frac{1}{2}}{m-1} - 2(m-1)\alpha \\
&= -2\alpha + 2\alpha \frac{m-1-\frac{1}{2}}{m-1} \\
&< -2\alpha + 2\alpha \\
&= 0
\end{aligned}$$

Da $b(m) > 0$ wissen wir, dass sich die Lösung für I_m durch die Zusammenfahrt verbessert. Analog wissen wir mit $b(m-1) < 0$, dass sich die Lösung für I_{m-1} durch die Zusammenfahrt verschlechtert. Somit lohnt sich die Zusammenfahrt für m, aber nicht für $m-1$. ∎

4.4. Online-Algorithmus

Die letzte Eigenschaft ist eher ein Algorithmus-Ansatz, als ein lokales Entscheidungskriterium. Spezifisch betrachten wir Reisende in einer festen Reihenfolge. Mit jedem weiteren Reisenden wollen wir die aktuelle Lösung erweitern, um eine optimale Lösung zu erhalten. Jeden zusätzlichen Reisenden betrachten wir als einen Schritt des Algorithmus. Dann gibt es zu jedem Schritt neue Möglichkeiten, wie Reisende zusammenfahren können. Jede davon involviert den neuen Reisenden, denn sonst wäre die Zusammenfahrt bereits vorher möglich gewesen. Um die bisherige Lösung zu erweitern, sollen bisher zusammengefahrene Strecken in jedem Schritt erhalten. In den bisherigen Beispielen lässt sich eine Reihenfolge finden, in der wir mit diesem Ansatz eine optimale Lösung erhalten. Allerdings zeigen wir anhand der Instanz aus Abbildung 4.5, dass wir nicht immer mit jeder beliebigen Reihenfolge eine optimale Lösung erhalten. Weiter gibt es $|R|!$ Reihenfolgen an Reisenden. Damit aus dem Ansatz ein optimaler Algorithmus entstehen kann, würde es also eine effiziente Suche nach der korrekten Reihenfolge benötigen.

Lemma 4.4: *In aufsteigend durchnummerierter Reihenfolge liefert der Ansatz eine nicht optimale Lösung für die Instanz in Abbildung 4.5.*

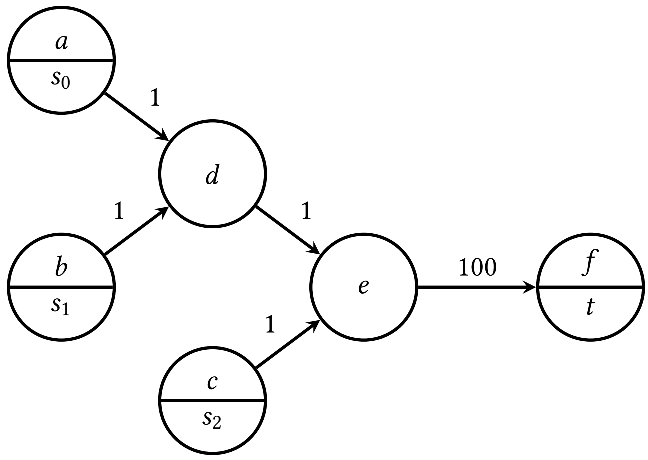

Abbildung 4.5.: Ein Gegenbeispiel für sequentielles Aufbauen in beliebiger Reihenfolge mit $\alpha = 5$. In diesem Beispiel enden alle Reisenden am Knoten f, was wir mit der Markierung t ausdrücken.

Beweis. Zuerst erstellen wir in drei Schritten entsprechend der Reihenfolge eine Lösung, wobei wir zu jedem Zeitpunkt die beste Entscheidung treffen. Dann vergleichen wir diese mit einer anderen Lösung und sehen ein, dass die erstellte Lösung nicht optimal ist.

Im ersten Schritt betrachten wir nur den Reisenden r_0. Da r_0 sich mit keinem anderen Reisenden etwas teilen kann, ist die beste Lösung ein Fahrzeug, dass den Pfad von r_0 bedient und nur an Start und Ende hält.

Im zweiten Schritt betrachten wir zusätzlich noch r_1. Die Reisenden r_1 und r_0 haben drei Möglichkeiten sich etwas zu teilen: Sie können sich nur die Kante (d, e), nur die Kante (e, f) oder den Pfad (d, e, f) teilen. Für die Kante (d, e) brauchen sie vier zusätzliche Halte und für die Kante (e, f) oder den Pfad (d, e, f) je zwei zusätzliche Halte. Da sich auf dem Pfad (d, e, f) am meisten Strecke sparen lässt, ist die beste Lösung wie folgt: Ein Fahrzeug g fährt den Pfad (a, d, e, f) und hält an den Knoten a, d und f. Und ein weiteres Fahrzeug h fährt den Pfad (b, d) und hält an Start und Ende. Reisender r_0 fährt seine komplette Strecke in g. Reisender r_1 beginnt seinen Pfad in h und steigt an d für den restlichen Pfad in g um.

Im dritten und letzten Schritt betrachten wir noch r_2. Die einzige Strecke, die sich r_2 mit anderen Reisenden teilen kann ist die Kante (e, f). Da $c((e, f)) = 100$ mehr spart als die zwei zusätzlichen Halte, ergibt sich folgende Lösung L: Es fahren drei Fahrzeuge $\hat{f}$, g und h. Das Fahrzeug $\hat{f}$ fährt die Kante (c, e) und hält an Start und Ende. Das Fahrzeug g fährt den Pfad (a, d, e, f) und hält an jedem Knoten. Und das Fahrzeug h fährt die Kante (b, d) und hält an Start und Ende. Insgesamt halten Fahrzeuge achtmal. Reisender r_0 fährt seine komplette Strecke in g. Reisender r_1 beginn seine Strecke in h und steigt an Knoten d in Fahrzeug g um. Und Reisender r_2 beginnt seine Strecke in $\hat{f}$ und steigt an e in g um.

Dann ergibt sich für die Lösung L der Wert

$$\begin{aligned}\hat{c}_L &= c((c, e)) + c((a, d)) + c((d, e)) + c((e, f)) + c((b, d)) + 8\alpha \\ &= 1 + 1 + 1 + 100 + 1 + 8 \cdot 5 \\ &= 144.\end{aligned}$$

Alternativ betrachte die Lösung L' gegeben durch: Drei Fahrzeuge $\hat{f}$, g und h. Das Fahrzeug $\hat{f}$ befährt die Kante (c, e) und hält an Start und Ende. Das Fahrzeug g befährt den Pfad (a, d, e, f) und hält an a, e und f. Und das Fahrzeug h befährt den Pfad (b, d, e) und hält an

Start und Ende. In L' halten Fahrzeuge somit insgesamt siebenmal. Reisender r_0 fährt seine komplette Strecke in g. Reisender r_1 fährt zu Beginn in h und steigt an Knoten e für die restliche Strecke in g. Und Reisender r_2 beginnt seine Strecke in $\hat{f}$ und steigt an e für die restliche Strecke in e um. Für den Wert der Lösung L ergibt sich

$$\begin{aligned}
\hat{c}_{L'} &= c((c,e)) + c((a,d)) + c((d,e)) + c((e,f)) + c((b,d)) + c((d,e)) + 7\alpha \\
&= 1 + 1 + 1 + 100 + 1 + 1 + 7 \cdot 5 \\
&= 140.
\end{aligned}$$

Da $\hat{c}_L$ größer ist als $\hat{c}_{L'}$, ist die berechnete Lösung L nicht optimal. ∎

5. Einschränkung auf Graphenklassen

Auf allgemeinen Graphen gestaltet es sich schwierig, einen polynomiellen Algorithmus zu entwickeln. Deshalb betrachten wir als eine Einschränkung des Problems Fahrzeugzuweisung mit Haltekosten die Beschränkung der möglichen Graphen in der Eingabe auf bestimmte Graphenklassen. Ohne die Struktur des Problems zu verändern, können wir so den Einfluss verschiedener Verkehrsnetze auf die Schwierigkeit des Problems Fahrzeugzuweisung mit Haltekosten untersuchen.

In diesem Kapitel fordern wir, dass die Kostenfunktion c echt positiv ist. Das heißt, für alle $e \in E$ gilt $c(e) > 0$.

5.1. Gerichtete Pfade

Eine einfache Graphenklasse ist die aller gerichteten Pfade. Dazu werden wir zunächst eine allgemeine Erkenntnis einsehen: In jeder beliebigen Instanz des Problems Fahrzeugzuweisung mit Haltekosten sind die nicht von Reisenden befahrenen Kanten für eine optimale Lösung nicht relevant. Danach zeigen wir, dass auf gerichteten Pfaden eine optimale Lösung auf jeder Zusammenhangskomponente von $\cup R$ aus einem Fahrzeug besteht. Mit dieser Erkenntnis zeigen wir, dass wir eine optimale Lösung einer Instanz des Problems Fahrzeugzuweisung mit Haltekosten auf einem gerichteten Pfad schnell berechnen können.

Lemma 5.1: *In einer optimalen Lösung einer beliebigen Instanz des Problems Fahrzeugzuweisung mit Haltekosten befährt kein Fahrzeug eine Kante, an der es keinen Reisenden bedient.*

Beweis. Angenommen in einer Lösung existiert ein Fahrzeug f, das eine Kante e befährt, an der es keinen Reisenden bedient. Dann teile f auf in ein Fahrzeug f_1, das alle Reisenden vor e bedient, und ein Fahrzeug f_2, das alle Reisenden nach e bedient. f_1 endet am letzten Halt eines von f bedienten Reisenden vor e. f_2 startet am ersten Halt eines von f bedienten Reisenden nach e. Bedient f vor bzw. nach e keinen Reisenden, fällt das entsprechende Fahrzeug f_1 bzw. f_2 aus der Lösung. Dadurch werden es höchstens weniger Halte, wenn f_1 oder f_2 wegfällt. Außerdem fällt in jedem Fall die Kante e weg. Die Lösung war also nicht optimal. ∎

Satz 5.2: *Für einen gerichteten Pfad besteht eine optimale Lösung aus einem Fahrzeug je Zusammenhangskomponente von $\cup R$. Dieses Fahrzeug fährt genau die Strecke vom Start des ersten bis zum Ziel des letzten Reisenden. Es hält exakt an den Knoten, an denen Reisende starten oder enden. Dabei hält es an jedem dieser Knoten genau einmal.*

Beweis. Nach Lemma 5.1 wissen wir, dass kein Fahrzeug eine Kante befährt, die kein Reisender befahren möchte. Entsprechend können wir die Lösung für jede Zusammenhangskomponente von $\cup R$ alleine betrachten. Eine solche Zusammenhangskomponente ist ein inklusionsmaximaler zusammenhängender Teilgraph, sodass es für jede Kante einen Reisenden gibt, der diese befahren möchte. Somit können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon ausgehen, dass unser Pfad bereits eine solche Zusammenhangskomponente bildet. Da jede Kante von einem Reisenden befahren werden möchte, wissen wir außerdem, dass ein Reisender am ersten Knoten des Pfads startet und einer am letzten Knoten des Pfads endet.

Wir wollen also zeigen, dass eine optimale Lösung gegeben ist durch ein einziges Fahrzeug f. f fährt einmal die Strecke des Pfads und hält an jedem Knoten genau einmal, an dem ein Reisender startet oder endet.

Nach Definition fährt f jede Kante genau einmal. Da jede Kante von zumindest eEinmalSelbesFahrzeugImmerSelbesFahrzeuginem Reisendem befahren werden möchte, muss jede Kante auch mindestens einmal befahren werden. Ebenso hält dieses Fahrzeug genau an den Knoten, an denen Reisende starten oder enden. Es hält an diesen Knoten aber auch jeweils nur einmal. Somit hat diese Lösung sowohl die kleinstmögliche Zahl an Halten als auch nur die minimale Menge an Kanten befahren. Also ist sie optimal. ∎

Korollar 5.3: *Auf gerichteten Pfaden kann die* Fahrzeugzuweisung mit Haltekosten *in* $\mathcal{O}(|E_R|)$ *berechnet werden.*

Beweis. In Satz 5.2 haben wir gezeigt, dass es ein einfaches Schema für eine optimale Lösung für einen Pfad gibt. Zur Berechnung der Fahrzeugs und der Fahrzeugzuweisung verwenden wir einen Sweepline-Algorithmus. Die Events sind die Starts und Enden der Reisenden, in der Reihenfolge des Pfads. Bei jedem auftretenden Event fügen wir die Strecke vom letzten Event zum aktuellen Knoten als neuen letzten Teilpfad dem Fahrzeug hinzu. Ist die hinzugefügte Strecke von Länge 0 ändert sich das Fahrzeug stattdessen nicht. Endet mit einem Event der aktuell letzte Reisende, der gestartet aber noch nicht geendet ist, fahren ab diesem Event keine Reisende. In diesem Fall erstellen wir beim nächsten Event stattdessen ein neues Fahrzeug. Dadurch haben wir dann gerade Fahrzeuge beschrieben, die die Zusammenhangskomponenten von $\cup R$ befahren und an jedem enthaltenen Start oder Ende halten. Die Zuweisung ζ bestimmen wir, indem wir jeder Kante jedes Reisenden das aktuelle Fahrzeug bei dem Event ihres Endes zuweisen.

Dann benötigen wir für die Berechnung des Fahrzeugs Zeit $\mathcal{O}(|R| + |E|)$, da wir Start und Ende eines jeden Reisenden und jede Kante genau einmal betrachten. Für die Berechnung der Fahrzeugzuweisung benötigen wir Zeit $\mathcal{O}(|E_R|)$, da wir für jede Kante jedes Reisenden eine Ausgabe tätigen. Somit folgt die geforderte Laufzeit. ∎

5.2. Einhals-Spinnen

Eine weitere Graphenklasse ist die der Einhals-Spinnen. Mit Einhals-Spinnen beschreiben wir Spinnen, die auf eine besondere Art gerichtet sind. Wir fordern, dass einer der Pfade auf den Abspaltungspunkt zu und alle anderen vom Abspaltungspunkt weg gerichtet sind. Den Pfad, der auf den Abspaltungspunkt zu gerichtet ist, nennen wir *Hals*. Jeden der restlichen Pfade nennen wir *Bein*.

In diesem Abschnitt zeigen wir einige Eigenschaften einer optimalen Lösung. Mit diesen Eigenschaften stellen wir einen Polynomialzeitalgorithmus vor, der allerdings auf einer polynomiellen Lösbarkeit des Problems Gruppenzusammenfahrt beruht. Wir gehen in Abschnitt 5.2.4 näher darauf ein.

Zu Beginn noch eine Definition. Ein Knoten v heißt *höher* als ein anderer Knoten $u \neq v$, wenn im Graphen ein v, u-Pfad p existiert. In dem Fall sagen wir auch: Der Knoten v liegt oberhalb von u. Ist die Summe der Kantengewichte von p c, sagen wir auch, dass v c höher

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "f'"'] & v \arrow[r, "\hat{f}"] & x \arrow[r, "\hat{f}"] & y \end{tikzcd}$$

Abbildung 5.1.: Die Situation in Lemma 5.4. An der Kante $e = (u, v)$ fahren zwei Reisende in den verschiedenen Fahrzeugen f und f'. Unterhalb von v und oberhalb von y, insbesondere an der Kante $e' = (x, y)$, fahren beide Reisende im selben Fahrzeug $\hat{f}$. In Lemma 5.4 zeigen wir, dass eine solche Lösung nicht optimal ist.

ist als u. Analog erweitern wir das Konzept auf Kanten, Pfade und Kombinationen davon. Eine Kante (u, v) ist höher als eine andere Kante (u', v'), wenn im Graphen ein v, u'-Pfad existiert. Eine Kante (u, v) ist höher als ein Knoten w, wenn im Graphen ein v, w-Pfad existiert. Ein Knoten w ist höher als eine Kante (u, v), wenn im Graphen ein w, u-Pfad existiert. Ein Pfad $(v_0, \dots, v_n)$ ist höher als ein Knoten u, wenn im Graphen ein v_n, u-Pfad existiert. Ein Knoten u ist höher als ein Pfad $(v_0, \dots, v_n)$, wenn im Graphen ein u, v_0-Pfad existiert. Ein Pfad $(v_0, \dots, v_n)$ ist höher als eine Kante (u, v), wenn im Graphen ein v_n, u-Pfad existiert. Eine Kante (u, v) ist höher als ein Pfad $(v_0, \dots, v_n)$, wenn im Graphen ein v, v_0-Pfad existiert. Ist a höher als b, sagen wir auch b ist niedriger als a oder b liegt unterhalb von a.

5.2.1. Struktur einer optimalen Lösung

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Struktur einer optimalen Lösung. Zuerst wollen wir zeigen, dass nur ein Teil der Graphenstruktur größerer Aufmerksamkeit bedarf. Denn in den Beinen und auch weit oben im Hals verkehrt jeweils nur ein Fahrzeug. Außerdem zeigen wir noch weitere Aussagen, mit deren Hilfe wir später den schwierigen Teil in der Mitte untersuchen.

Wir sprechen häufiger davon, dass wir ein Fahrzeug f erweitern, sodass es die Reisenden eines anderen Fahrzeugs g bis zu einem Knoten v bedient. In dem Fall verlängern wir den Pfad von f, um den Teilpfad von g oberhalb von v. Zusätzlich hält f oberhalb von v an allen Knoten, an denen g hält. Außerdem hält f an v. Ebenso passen wir die Zuweisung ζ an, sodass ein Reisender an einer Kante oberhalb von v von f bedient wird, wenn es vorher von g bedient wurde.

Als erstes zeigen wir in drei Schritten, dass in einer optimalen Lösung in jedem Bein nur ein Fahrzeug fährt. Dafür zeigen wir zuerst, dass wenn zwei Reisende in einer optimalen Lösung im selben Fahrzeug sitzen, sie davor schon immer im gleichen Fahrzeug gesessen haben. Damit zeigen wir dann, dass in jedem Bein an jeder Kante nur ein Fahrzeug verkehrt. Hieraus folgern wir dann, dass im gesamten Bein schon nur ein Fahrzeug verkehrt.

Lemma 5.4: *Sei $G = (V, E)$ eine Einhals-Spinne. Seien weiter $r, r' \in R$ zwei Reisende. Seien außerdem $e, e' \in E$ mit e höher als e' zwei Kanten, die von beiden befahren werden. Ist L eine optimale Lösung des Problems* Fahrzeugzuweisung mit Haltekosten *mit $\zeta(r, e') = \zeta(r', e')$, dann gilt auch $\zeta(r, e) = \zeta(r', e)$.*

Die Situation ist schematisch in Abbildung 5.1 dargestellt. An der Kante $e = (u, v)$ fahren beide Reisende in verschiedenen Fahrzeugen, aber an der niedrigeren Kante $e = (x, y)$ fahren beide im selben Fahrzeug.

Beweis. Angenommen L ist eine optimale Lösung mit $\zeta(r, e') = \zeta(r', e')$, aber $\zeta(r, e) \neq \zeta(r', e)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $(u, v) := e$ die niedrigsten Kante, die höher als e' liegt und für die $\zeta(r, e) \neq \zeta(r', e)$ gilt. Seien $f = \zeta(r, e)$ und $f' = \zeta(r', e)$ die Fahrzeuge,

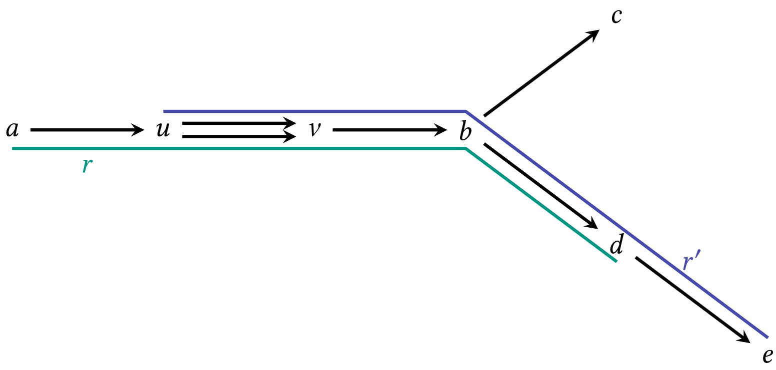

Abbildung 5.2.: Die Situation in Lemma 5.5. Das Ziel zweier Reisenden r und r' liegt im selben Bein. An der Kante $e = (u, v)$ fahren beide Reisende aber in verschiedenen Fahrzeugen. In Lemma 5.5 zeigen wir, dass eine solche Lösung nicht optimal ist.

in denen die beiden Reisenden die Kante befahren. Sei weiter $\hat{f}$ das Fahrzeug, indem sie ab v zusammen fahren. Dabei kann $\hat{f}$ mit f oder mit f' übereinstimmen. Sprechen wir im Folgenden von Änderungen an f oder f', treffen diese nur zu, wenn das jeweilige Fahrzeug nicht schon mit $\hat{f}$ übereinstimmt.

Dann erhalten wir eine neue Lösung $\hat{L}$: Wir erweitern $\hat{f}$, sodass $\hat{f}$ alle Reisenden von f und f' bis v bedient. f und f' hingegen starten erst bei v. Da G eine Einhals-Spinne ist, ist die Strecke bis v ein Pfad. Somit ist $\hat{L}$ wohldefiniert. In $\hat{L}$ befährt $\hat{f}$ nur die Strecken mehr, die in L, aber nicht in $\hat{L}$, von f und f' befahren werden. Von beiden befahrene Kanten, befährt es aber nur einmal. Insbesondere ist $\hat{L}$ in Bezug auf Strecke um mindestens $c(e)$ besser als L. Ebenso hält $\hat{f}$ in $\hat{L}$ bis u zusätzlich höchstens an den Knoten, an denen in L, aber nicht in $\hat{L}$, f und f' halten. Ab v halten alle drei Fahrzeuge in $\hat{L}$ an den selben Knoten wie in L. Auch an v, da in L r aus f und r' aus f' in $\hat{f}$ umsteigen wollen. Somit haben wir eine bessere Lösung $\hat{L}$ gefunden. Ein Widerspruch zur Annahme, dass die Lösung L optimal ist. ∎

Lemma 5.5: *Sei $G = (V, E)$ eine Einhals-Spinne. Seien weiter $r, r' \in R$ zwei Reisende, deren Ziel im selben Bein exklusive dem Abspaltungspunkt liegt. Sei außerdem $e \in E$ eine Kante, die von beiden befahren wird. Dann gilt in jeder optimalen Lösung des Problems Fahrzeugzuweisung mit Haltekosten, dass beide Reisenden an der Kante e vom selben Fahrzeug bedient werden:*

$$\zeta(r, e) = \zeta(r', e).$$

Die Situation ist schematisch in Abbildung 5.3 zu sehen. Zwei Reisende fahren ins selbe Bein, benutzen aber an der Kante $e = (u, v)$ verschiedene Fahrzeuge.

Beweis. Sei also eine Probleminstanz mit zwei Reisenden $r, r' \in R$ mit Ziel im selben Bein exklusive Abspaltungspunkt gegeben. Sei weiter L eine optimale Lösung, in der Kanten existieren, die von r und r' in unterschiedlichen Fahrzeugen befahren werden. Sei $(u, v) = e \in E$ die niedrigste solcher Kanten. Seien $f = \zeta(r, e)$ und $f' = \zeta(r', e)$ die Fahrzeuge, in denen die beiden Reisenden die Kante befahren.

Dann unterscheiden wir ob r und r' ab v noch weiterfahren, oder zumindest einer endet.

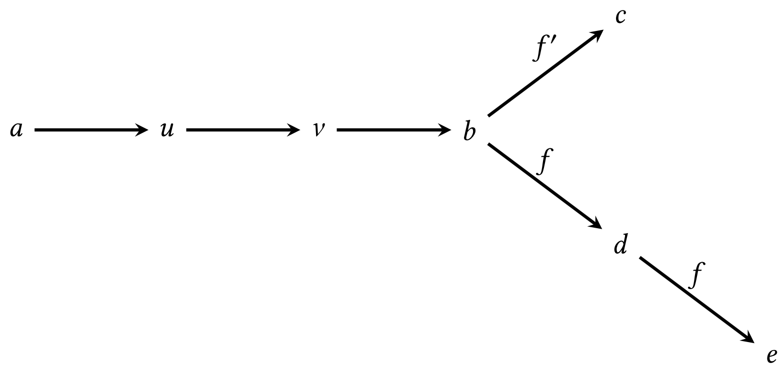

Abbildung 5.3.: In einem Bein verkehrt nur ein Fahrzeug, dass alle Reisenden bedient.

Fahren beide weiter, fahren sie ab v im selben Fahrzeug. Denn ihr Ziel liegt im selben Bein und e ist die niedrigste Kante, in der sie mit verschiedenen Fahrzeugen fahren. Somit sind wir in der Situation aus Lemma 5.4 und es folgt bereits, dass $f = f'$ gelten muss, da L eine optimale Lösung ist.

Ende stattdessen mindestens einer der Reisenden am Knoten v. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ende der Reisende r'. Dann erhalten wir eine neue Lösung L': Verlängere f, sodass es alle Reisenden von f' bedient. Das Fahrzeug f' ist nicht mehr Teil der neuen Lösung L'. Da r' am Knoten v endet, befindet sich dieser bereits im Bein. Deshalb bildet die Vereingung der Strecken von f und f' einen Pfad. Die neue Lösung L' ist also wohldefiniert. In L' hält f an der Vereinigung der Halte von f und f' in L. Ebenso befährt f in L' die Vereinigung der Strecken von f und f' in L. Allerdings wird e in L' einmal weniger befahren als in L. Somit ist die Lösung L' besser als die als optimal angenommen Lösung L. Ein Widerspruch. ∎

Lemma 5.6: *Sei $G = (V, E)$ eine Einhals-Spinne, sodass jede Kante von einem Reisenden befahren wird. Sei B ein Bein der Spinne. Dann existiert in jeder optimalen Lösung ein Fahrzeug f, sodass jeder Reisender r an jeder Kante e im Bein B von f bedient wird. Das heißt: $\zeta(r, e) = f$.*

Abbildung 5.3 zeigt schematisch die Aussage von Lemma 5.6. In jedem Bein verkehrt genau ein Fahrzeug, dass alle Reisenden bedient.

Beweis. Seien also eine Probleminstanz und ein Bein B des Graphen gegeben. Seien weiter $r, r' \in R$ zwei Reisende und $e, e' \in E$ zwei Kanten in B, sodass r die Kante e und r' die Kante e' befährt. Dabei seien r und r' sowie e und e' nicht notwendigerweise verschieden.

Ist bereits $e = e'$ erhalten wir die Aussage aus Lemma 5.5. Wir wissen also bereits, dass in jeder optimalen Lösung jede Kante innerhalb eines Beins nur von einem Fahrzeug befahren wird.

Sei nun L eine optimale Lösung, für die $\zeta(r, e) \neq \zeta(r', e')$ gilt. Insbesondere gilt auch $e \neq e'$. Sei f das Fahrzeug, das die Kante in B inzident zum Abspaltungspunkt befährt. Wir verlängern den Pfad von f bis zum niedgristen Knoten des Beins B. Weiter halte f an jedem Start und Ende eines Reisenden im Bein B. Dann ersetzen wir alle Fahrten mit Fahrzeugen in B durch Fahrten mit dem verlängerten f für eine neue Lösung L'. Alle anderen Fahrzeuge befahren in L' keine Kanten aus B. Da nach Voraussetzung jede Kante von einem Reisenden befahren wird, befahren wir dadurch nicht mehr Kanten mit Fahrzeugen. Weiter müssen auch die Fahrzeuge vorher an jedem Start und Ende eines Reisenden gehalten haben, also hält f auch nicht häufiger in B als die Fahrzeuge in L. In L werden die zwei verschiedenen Kanten e und

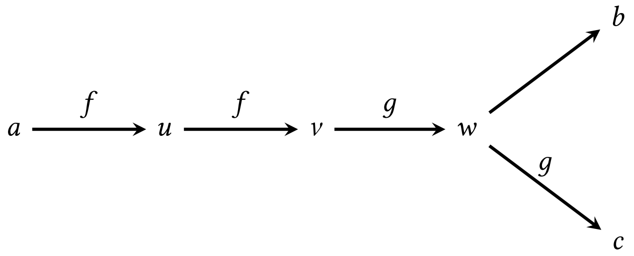

Abbildung 5.4.: Die Situation aus Lemma 5.7. Das Fahrzeug f endet am Knoten v. Das Fahrzeug g befährt die Kante (v, w) und potentiell noch weitere Kanten. Eine solche Lösung ist nicht optimal.

e' von verschiedenen Fahrzeugen bedient. Somit existieren auch zwei adjazente Kanten $\hat{e}$ und $\hat{e}'$, die in L von verschiedenen Fahrzeugen $\hat{f}$ und $\hat{f}'$ bedient werden. Sei v der zu $\hat{e}$ und $\hat{e}'$ inzidente Knoten. Dann muss ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\hat{f}$ an v enden und $\hat{f}'$ an v starten. In L gibt es also zwei Halte an v. In L' hingegen hält nur f maximal einmal an v. Also war die Lösung L nicht optimal. Ein Widerspruch. ∎

Nun wollen wir weiter zeigen, dass in dem Bereich von mindestens 2α über dem Abspaltungspunkt auch nur ein Fahrzeug verkehrt. Dafür zeigen wir zuerst, dass kein Fahrzeug an einem Knoten v enden kann, wenn ein weiteres Fahrzeug noch ab v fährt. Damit zeigen wir weiter, dass in dem Bereich an jeder Kante nur ein Fahrzeug verkehrt. Hieraus folgern wir dann, dass es in dem Bereich des Halses insgesamt nur ein Fahrzeug gibt.

Lemma 5.7: *Sei $G = (V, E)$ eine Einhals-Spinne. Sei (u, v, w) ein Teilpfad von G. Sei weiter L eine optimale Lösung mit zwei Fahrzeugen f und g. Dann kann nicht gleichzeitig f an v enden und g die Kante (v, w) befahren.*

Die Situation ist schematisch in Abbildung 5.4 zu sehen. Der Teilpfad (u, v, w) liegt im Hals und Fahrzeug f endet an Knoten v und Fahrzeug g befährt die Kante (v, w).

Beweis. Angenommen L ist eine optimale Lösung, in der f an v endet und g die Kante (v, w) befährt. Konstruiere eine neue Lösung L', in der wir g erweitern, sodass es alle Reisenden von f bedient. Das Fahrzeug f ist nicht Teil der Lösung L'. Dann ist L' wohldefiniert, weil G eine Einhals-Spinne ist und somit der Teilgraph oberhalb von v ein Pfad ist.

Fall 1, g startet an v. Dann spart die neue Lösung L' gegenüber L einen Halt, weil f nicht mehr an v halten muss und g in beiden Lösungen an v hält.

Fall 2, g startet schon vor v. Dann befahren f und g in L beide die Kante (u, v). In L' befährt f die Kante nicht.

Also ist die Lösung L' echt besser als die optimale Lösung L. Ein Widerspruch. ∎

Lemma 5.8: *Sei $G = (V, E)$ eine Einhals-Spinne, sodass jede Kante von einem Reisenden befahren wird. Seien weiter $r, r' \in R$ zwei Reisende und $(u, v) = e \in E$ eine Kante, die von beiden befahren wird. Sei weiter u mehr als 2α höher als der Abspaltungspunkt. Dann gilt in jeder optimalen Lösung L des Problems* Fahrzeugzuweisung mit Haltekosten $\zeta(r, e) = \zeta(r', e)$.

Diese Situation ist schematisch zu sehen in Abbildung 5.5: Der Knoten u liegt mehr als 2α höher als der Abspaltungspunkt a. In dem Fall fährt an e nur ein Fahrzeug.

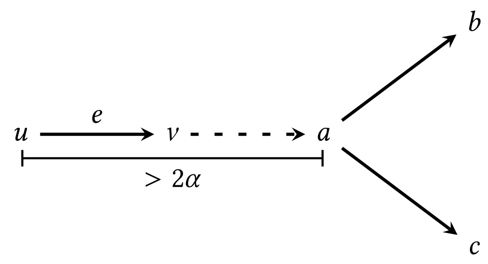

Abbildung 5.5.: Die Situation aus Lemma 5.8. Der Knoten u liegt mehr als 2α oberhalb vom Abspaltungspunkt a. Dann verkehrt an der Kante e nur ein Fahrzeug.

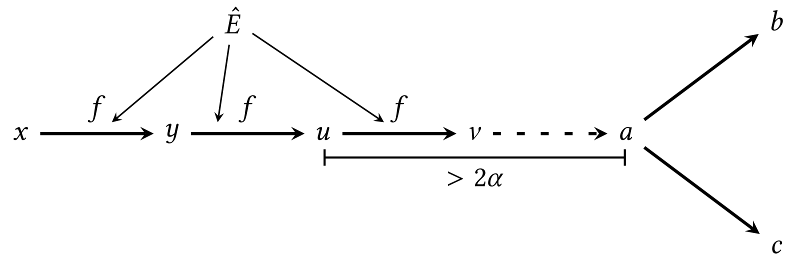

Abbildung 5.6.: Die Situation aus Korollar 5.9. Die Menge $\hat{E}$ sind die Kanten, für die der Startknoten mehr als 2α vom Abspaltungspunkt a entfernt sind. Die Kanten aus $\hat{E}$ werden nur von einem Fahrzeug f befahren.

Beweis. Angenommen es existiert eine optimale Lösung L mit $f := \zeta(r, e) \neq \zeta(r', e) =: f'$. Dann wissen wir nach Lemma 5.7, dass f und f' nicht im Hals enden können. Somit fahren beide Fahrzeuge über den Abspaltungspunkt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit starte f höher als f'. Dann erhalten wir eine weitere Lösung L', in der f' erst beim Abspaltungspunkt startet. Stattdessen bedient f alle Reisenden von f' bis zum Abspaltungspunkt. L' benötigt bis zu zwei zusätzliche Halte, weil f und f' jetzt beide am Abspaltungspunkt halten. Da aber die gemeinsame Strecke, die in L' nur noch von f befahren wird, eine Länge von mehr als 2α hat, ist die Lösung L' echt besser als L. Ein Widerspruch. ∎

Korollar 5.9: *Sei $G = (V, E)$ eine Einhals-Spinne, sodass jede Kante von einem Reisenden befahren wird. Sei L eine optimale Lösung des Problems* Fahrzeugzuweisung mit Haltekosten. *Sei $\hat{E}$ die Menge aller Kanten im Hals deren Startpunkt mehr als 2α vom Abspaltungspunkt entfernt sind. Dann existiert in L ein Fahrzeug f, sodass für alle $e \in \hat{E}$ und alle Reisenden r, die e befahren, $\zeta(r, e) = f$ gilt.*

Abbildung 5.6 zeigt diese Situation schematisch. Die Kanten mehr als 2α oberhalb dem Abspaltungspunkt a werden von nur einem Fahrzeug f befahren.

Beweis. Nach Lemma 5.8 wissen wir, dass in L jede Kante von $\hat{E}$ nur von einem Fahrzeug befahren wird. Somit folgt die Aussage direkt mit Lemma 5.7. ∎

Aus Lemma 5.6 und Korollar 5.9 folgt dann, dass der schwierige Teil im Bereich von 2α über dem Abspaltungspunkt liegt. Für den Rest sieht eine optimale Lösung immer nur genau ein Fahrzeug vor.

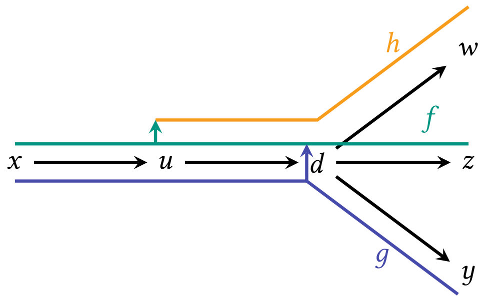

Abbildung 5.7.: Die Situation aus Lemma 5.10. Jede der drei farbigen Linien symbolisiert ein Fahrzeug. Sowohl am Knoten u als auch am Knoten d gibt es Umstiege, die das Fahrzeug f involvieren. Die Umstiege sind dargestellt durch die Pfeile zwischen den Fahrzeugen.

In dem schwierigen Teil müssen wir differenzierter über die Zusammenfahrt von Reisenden reden können. Mit dem folgenden Lemma 5.10 sehen wir ein, dass eine Zusammenfahrt nur an einem Knoten durch einen Umstieg enden kann. Daraus motiviert führen wir den Begriff einer *Gruppe* ein. Eine Gruppe an Reisenden ist eine inklusionsmaximale Menge M an Reisenden, die bis zu einem Umstieg zusammenfährt. Ein Reisender aus M muss nicht die komplette Strecke bis zum Umstieg befahren. Aber jedes Streckenstück, die er befährt, befährt er gemeinsam mit allen anderen Reisenden aus M. Reisende der Gruppe mögen nach dem Umstieg noch weiterhin im selben Fahrzeug fahren. Allerdings nur, wenn ihre gemeinsame Fahrt sie in dasselbe Bein führt. Sie somit nach Lemma 5.6 also ihre gesamte restliche Fahrt teilen. Ebenso wissen wir nach Lemma 5.4, dass die Zusammenfahrt für jeden Reisenden der Menge M bereits bei seinem Start beginnt. Wir können eine Gruppe an Reisenden somit durch die Menge zusammenfahrender Reisender und den Knoten, der das Ende der Zusammenfahrt markiert, beschreiben.

Für die sukzessive Anwendung innerhalb eines Algorithmus erweitern wir später den Begriff noch zu einer Gruppe an Fahrzeugen. Statt einer Menge an Reisenden lassen wir eine Menge M an Fahrzeugen zusammenfahren. Effektiv haben wir damit aber nur die Zusammenfahrt der Reisenden beschrieben. Denn für die Reisenden gilt nach Lemma 5.6 und Lemma 5.4 dasselbe wie wenn wir direkt die Gruppe der Reisenden gegeben durch die Reisenden der Fahrzeuge aus M betrachten. In einer Lösung lässt sich am einfachsten einsehen, dass zwei Fahrzeuge Teil einer Gruppe sind, wenn entweder Reisende aus einem der beiden Fahrzeuge ins andere umsteigen oder es ein weiteres Fahrzeug gibt, aus dem Reisende in die beiden Fahrzeuge umsteigen.

In den folgenden Lemmata betrachten wir dabei meistens eine Gruppe aus zwei Fahrzeugen. Die gezeigten Aussagen erweitern sich aber auf größere Gruppen.

Lemma 5.10: *Sei $G = (V, E)$ eine Einhals-Spinne und R Reisende, sodass jede Kante von einem Reisenden befahren wird. Seien $u, d \in V$ Knoten von G, sodass u oberhalb von d liegt. Sei nun L eine optimale Lösung des Problems* Fahrzeugzuweisung mit Haltekosten. *Sei f ein Fahrzeug in L. Dann können nicht an u und an d Umstiege existieren, in die f involviert ist.*

Die Situation aus Lemma 5.10 zeigen wir schematisch in Abbildung 5.7. An den beiden Knoten u und d gibt es Umstiege von oder zu Fahrzeug f.

Beweis. Seien $G = (V, E), u, d \in V, L$ und f wie in der Voraussetzung gegeben. Nach Lemma 5.6 wissen wir, dass in einer optimalen Lösung innerhalb eines Beins nur ein Fahrzeug verkehrt. Somit folgt, dass d nicht niedriger als der Abspaltungspunkt liegt. Angenommen es gibt an u und an d Umstiege, in die f involviert ist. Das heißt, Reisenden steigen aus einem

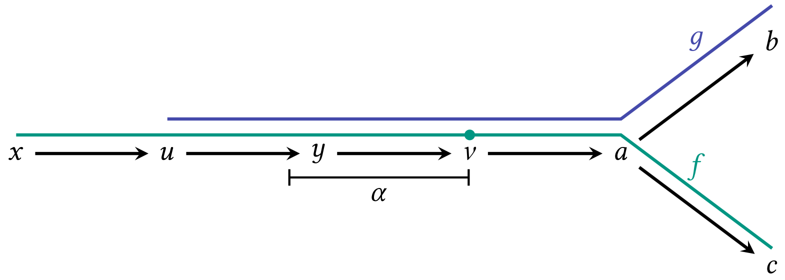

Abbildung 5.8.: Eine Situation, die nach Lemma 5.11 in einer optimalen Lösung nicht auftreten kann. Fahrzeug f hält an Knoten v – dargestellt durch den Punkt. Das Fahrzeug g beinhaltet ebenfalls den Knoten v. Allerdings beginnt die gemeinsam gefahrene Strecke von f und g am Knoten u, der mehr als α höher ist als v.

anderen Fahrzeug in f oder aus f in ein anderes Fahrzeug um. Da wir die Existenz zu einem Widerspruch führen wollen, dürfen wir davon ausgehen, dass unsere Wahl von f, u und d gerade so ist, dass der Abstand zwischen u und d minimal ist. Da der Abstand zwischen u und d minimal ist, kann keines der beteiligten Fahrzeuge zwischen u und d in weitere Umstiege involviert sein. Sei U die Menge an Fahrzeugen, die neben f in Umstiegen an u involviert ist.

Konstruiere nun eine neue Lösung L': Ersetze f durch ein neues Fahrzeug f', das alle Reisenden von f und bis d auch alle Reisenden der Fahrzeuge aus U bedient. Jedes Fahrzeug $f_U \in U$ ersetzen wir durch ein neues Fahrzeug f'_U, das ab d startet und ab d alle Reisenden von f_U bedient. Da keines der Fahrzeuge aus U zwischen u und d hält, ist diese Lösung wohldefiniert. Weiter finden an u keine Umstiege mehr statt, in die f' involviert ist. Genau genommen finden sogar von u bis oberhalb von d keine Umstiege mehr statt, in die f' involviert ist.

Dann ist die Lösung L' besser als die Lösung L: Unterhalb von d stimmt die Lösung L' mit der Lösung L überein. An d werden $|U|$ neue Halte benötigt, die allerdings an u gespart werden. Weiter übernimmt f' alle Halte von f und aus U oberhalb von u, sodass sonst keine zusätzlichen Halte enstehen. Ebenso übernimmt f die Strecken, sodass keine zusätzlichen Fahrtstrecken entstehen. Allerdings wird in L' die Strecke zwischen u und d für jedes Fahrzeug aus U nicht mehr befahren; also insgesamt $|U| \geq 1$ Mal weniger. Wir erhalten einen Widerspruch zur Optimalität von L. ∎

Nun wollen wir noch weitere Eigenschaften über Gruppen lernen. So zum Beispiel, dass wenn ein Fahrzeug f an einem Knoten v hält, alle Reisenden oder Fahrzeuge, die mehr als α Strecke bis v zurücklegen, mit f in einer Gruppe sind, die sich frühstens an v aufteilt. Weiter werden wir im Beweis sehen, dass sich bei gemeinsamer Strecke von genau α jede optimale Lösung immer noch optimal bleibt, wenn diese stattdessen in einer Gruppe sind.

Lemma 5.11: *Sei $G = (V, E)$ eine Einhals-Spinne. Sei $v \in V$ ein Knoten. Sei L eine optimale Lösung und f, g zwei Fahrzeuge in L, deren Pfad den Knoten v beinhaltet. Hält f an v, so beginnt die gemeinsam gefahrene Strecke höchstens α höher als v.*

Abbildung 5.8 zeigt eine solche Situation, die nicht auftreten kann. Wie im Beweis gibt es zwei Fahrzeuge f und g, deren Zusammenfahrt an Knoten u mehr als α oberhalb von Knoten v beginnt. Weiter fahren beide Fahrzeuge über den Knoten v. Zusätzlich hält f an Knoten v.

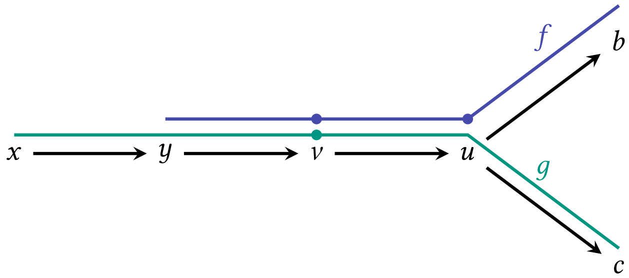

Abbildung 5.9.: Eine Situation, die nach Lemma 5.12 in einer optimalen Lösung nicht auftreten kann. Die Fahrzeuge f und g halten beide an Knoten v. Allerdings hält f außerdem an Knoten u, der unterhalb von v auf gemeinsamer Strecke von f und g liegt.

Beweis. Sei L eine optimale Lösung mit zwei Fahrzeugen f und g, deren Fahrtstrecke den Knoten v beinhaltet. Sei u der höchste Knoten, ab dem f und g beide verkehren. Das heißt, u ist der Start von f oder g, da G eine Einhals-Spinne ist. Sei u ohne Beschränkung der Allgemeinheit der Start von g. Angenommen f hält an v und u liegt mehr als α höher als v. Dann wissen wir, dass f und g die Strecke zwischen u und v befahren. Nun erhalten wir eine Lösung L', indem wir g erst ab v starten lassen. Bis v bedient f alle Reisenden von g und übernimmt dafür auch alle Halte.

Dann hat L' im Vergleich zu L im Allgemeinen einen Halt mehr, damit g an v halten kann. Allerdings wird die Strecke zwischen u und v einmal weniger befahren. Da die Strecke zwischen u und v länger als α ist, ist die Lösung L' echt besser als die Lösung L. Ein Widerspruch zur Optimalität von L. ∎

Außerdem fahren alle Fahrzeuge in einer Gruppe, die sich einen Halt teilen. Diese Aussage zeigen wir über zwei Teilaspekte: Zum einen halten zwei Fahrzeuge, die sich einen Halt teilen, nicht mehr unterhalb des geteilten Halts. Ansonsten könnten sie eine Gruppe bilden, die bis zu dem unteren Halt zusammenfährt und dadurch eine bessere Lösung bilden. Zum anderen muss auch eines der beiden Fahrzeuge am gemeinsamen Halt starten, da sonst auch hier eine Lösung mit beiden Fahrzeugen in einer Gruppe, in dem Fall bis zum gemeinsamen Halt, besser wäre.

Lemma 5.12: *Sei $G = (V, E)$ eine Einhals-Spinne, sodass jede Kante von einem Reisenden befahren wird. Sei $v \in V$ ein Knoten. Sei L eine optimale Lösung und f, g zwei Fahrzeuge in L, die am Knoten v halten. Dann hält weder f noch g auf gemeinsamer Strecke unterhalb von v.*

Abbildung 5.9 zeigt schematisch zwei Fahrzeuge f und g, die beide an einem Knoten v halten. Weiter hält f auch noch am Knoten u, der auch im von g befahrenen Pfad enthalten ist. Mit Lemma 5.12 zeigen wir, dass diese Situation in einer optimalen Lösung nicht auftreten kann.

Beweis. Sei also $G = (V, E)$ eine Einhals-Spinne mit zugehörigen Reisenden R, sodass jede Kante der Spinne von einem Reisenden befahren wird. Seien weiter $v \in V$ ein Knoten, L eine optimale Lösung und f und g zwei Fahrzeuge in L. Halten weiter f und g an v. Angenommen es hält eines der Fahrzeuge f und g an gemeinsamer Strecke unterhalb von v. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit halte f unterhalb von v, am Knoten $u \in V$ auf gemeinsamer Strecke mit g.

Dann können wir eine andere Lösung L' konstruieren: Wir ersetzen g durch ein neues Fahrzeug g', das ab u startet und ab u alle Reisenden von g bedient, wie auch g es vorher gemacht hat. Das Fahrzeug f ersetzen wir ebenfalls durch ein Fahrzeug f', das weiterhin

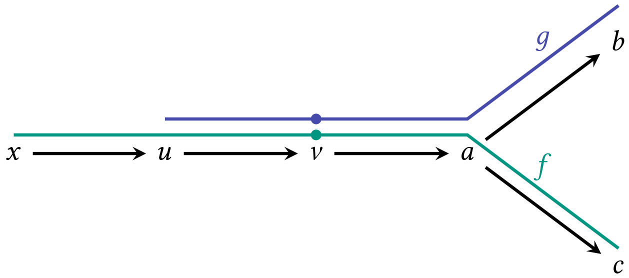

Abbildung 5.10.: Eine Situation, die nach Lemma 5.13 in einer optimalen Lösung nicht auftreten kann. Die Fahrzeuge f und g halten beide an Knoten v. Außerdem starten f und g beide oberhalb von v.

alle Reisende von f bedient, wie zuvor. Allerdings bedient f zusätzlich noch alle Reisenden von g oberhalb von u – genau so, wie sie in L von g bedient wurden. An u steigen dann alle Reisenden von g von f' nach g' um.

Dann ist die Lösung L' aber besser als die als optimal angenommene Lösung L: Oberhalb von u entstehen keine zusätzlichen Halte oder Fahrzeiten, da f' zusätzlich nur Strecke von g übernimmt. Geteilt Halte werden allerdings gespart, ebenso wie gemeinsam gefahrene Strecke. Insbesondere erfolgt am Knoten v ein Halt weniger. Und die Strecke zwischen v und u wird einmal gespart. An Knoten u hingegen erfolgt potentiell ein Halt mehr, da g' an u halten muss. Unterhalb von u entsprechen f' und g' gerade f und g. Somit erhalten wir einen Widerspruch dazu, dass L optimal war. ∎

Lemma 5.13: *Sei $G = (V, E)$ eine Einhals-Spinne, sodass jede Kante von einem Reisenden befahren wird. Sei $v \in V$ ein Knoten. Sei L eine optimale Lösung und f, g zwei Fahrzeuge in L, die am Knoten v halten. Dann startet f oder g bei v.*

Abbildung 5.10 zeigt schematisch die Situation, die nicht auftreten kann: Die Fahrzeuge f und g halten beide an v und starten beide oberhalb von v.

Beweis. Seien $G = (V, E)$, $v \in V$, L sowie f und g wie in der Voraussetzung. Angenommen weder f noch g startet an v. Dann starten beide oberhalb von v. Aufgrund der Struktur einer Einhals-Spinne fahren beide Fahrzeuge zuvor dieselbe Strecke. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit startet g an u unterhalb vom Start von f.

Dann erhalten wir eine neue Lösung L': Wir ersetzen g durch ein neues Fahrzeug g', das ab v startet und ab v alle Reisenden von g bedient, wie auch g es vorher gemacht hat. Das Fahrzeug f ersetzen wir ebenfalls durch ein Fahrzeug f', das weiterhin alle Reisende von f bedient, wie zuvor. Allerdings bedient f zusätzlich noch alle Reisenden von g oberhalb von v – genau so, wie sie in L von g bedient wurden. An v steigen dann alle Reisenden von g von f' nach g' um.

Dann ist die Lösung L' aber besser als die als optimal angenommene Lösung L: Oberhalb von v entstehen keine zusätzlichen Halte oder Fahrzeugzeiten, da f' nur die Strecke von vormals g übernimmt. Geteilt Halte werden allerdings gespart, ebenso wie gemeinsam gefahrene Strecke. Insbesondere erfolgt am Knoten u ein Halt weniger. Und die Strecke zwischen u und v wird einmal gespart. An Knoten v hingegen erfolgt potentiell ein Halt mehr, da g' an v halten muss. Unterhalb von v entsprechen f' und g' gerade f und g. Somit erhalten wir einen Widerspruch dazu, dass L optimal war. ∎

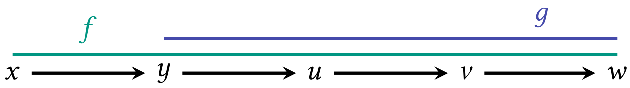

Abbildung 5.11.: Eine Situation, die nach Lemma 5.14 in einer optimalen Lösung nicht auftreten kann. Das Fahrzeug g befährt einen Teilpfad des Fahrzeugs f.

Ebenso kann es auch keine Fahrzeuge geben, deren befahrene Strecke ein Teilpfad der befahrenen Strecke eines anderen Fahrzeugs ist. Wir sehen hier also einen weiteren Grund, der erzwingt, dass Reisende Teil einer Gruppe sind.

Lemma 5.14: *Sei $G = (V, E)$ eine Einhals-Spinne. Sei L eine optimale Lösung. Dann kann es nicht zwei Fahrzeuge f und g geben, sodass die von g befahrene Strecke ein Teilpfad der von f befahrenen Strecke ist.*

Abbildung 5.11 zeigt zwei Fahrzeuge f und g. Das Fahrzeug g befährt dabei nur einen Teilpfad der Strecke von f. Eine Situation, von der wir jetzt beweisen, dass sie nicht auftreten kann.

Beweis. Sei $G = (V, E)$ eine Einhals-Spinne, R eine Menge Reisender und L eine optimale Lösung für die Instanz. Angenommen es gibt zwei Fahrzeuge f und g in L, sodass die von g befahrene Strecke ein Teilpfad der von f befahrenen Strecke ist.

Dann erhalten wir eine neue Lösung L': Wir ersetzen f durch ein Fahrzeug f', dass dieselbe Strecke wie f befährt und auch alle Reisenden von f genauso bedient wie f. Zusätzliche bedient f' aber auch die Reisenden von g. Das Fahrzeug g hingegen entfernen wir aus der Lösung. Da g einen Teilpfad von f befährt, ist die neue Lösung wohldefiniert.

Dann ist die Lösung L' aber besser als die Lösung L: Da f' genau die Halte von f und g übernimmt, entstehen keine zusätzlichen Halte im Vergleich zu L. Im Gegenteil wird je ein Halt gespart, für jeden Knoten, an dem f und g halten. Außerdem wird die komplette nicht-leere Strecke von g gespart. Ein Widerspruch zur Optimalität der Lösung L. ∎

Wir zeigen weiter auch noch Einschränkungen für das Ende der Zusammenfahrt einer Gruppe auf. Nach Lemma 5.13 wissen wir bereits, dass nach dem Halt, der das Ende der Zusammenfahrt der Gruppe bildet, keines der beteiligten Fahrzeuge mehr auf gemeinsamer Strecke hält. Mit Lemma 5.15 sehen wir ein, dass dieser Halt mit dem Abspaltungspunkt übereinstimmt, wenn er nicht bereits Start oder Ende eines der Reisenden der Fahrzeuge der Gruppe ist. Somit bleiben uns für das Ende der Zusammenfahrt einer Gruppe nur zwei Möglichkeiten: der Abspaltungspunkt oder ein letzter Start oder Ende. Mit Lemma 5.16 schränkt sich die mögliche Wahl noch weiter ein: Das Ende der Zusammenfahrt darf höchstens α über dem Abspaltungspunkt beziehungsweise dem Ende aller Fahrzeuge der Gruppe bis auf einem liegen. Aus dem Beweis ergibt sich wie bei Lemma 5.11, dass eine optimale Lösung ihre Optimalität beibehält, wenn eine Zusammenfahrt verlängert wird, wenn genau α Strecke nach dem Ende der Zusammenfahrt geteilt wird.

Lemma 5.15: *Sei $G = (V, E)$ eine Einhals-Spinne, R eine Menge an Reisenden, sodass jede Kante von G von einem Reisenden befahren wird. Sei $v \in V$ ein Knoten. Sei L eine optimale Lösung und F eine maximale Menge von Fahrzeugen in L, die am Knoten v halten. Weiter beinhalte F mindestens zwei Fahrzeuge. Startet oder endet keiner der Reisenden der Fahrzeuge aus F an v, so befahren die Fahrzeuge aus F ab v verschiedene Kanten.*

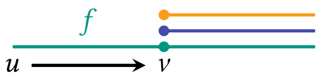

Abbildung 5.12.: Wir sehen eine Menge F der Fahrzeuge aus Lemma 5.15, die am Knoten v hält. Mit Lemma 5.13 wissen wir, dass – wie abgebildet – bis auf ein Fahrzeug f alle Fahrzeuge aus f an v starten. Wir nehmen an, dass kein Reisender an v startet oder endet. Lemma 5.15 liefert uns dann, dass die Fahrtstrecken unterhalb von v verschieden sind. Der Knoten v ist also der Abspaltungspunkt.

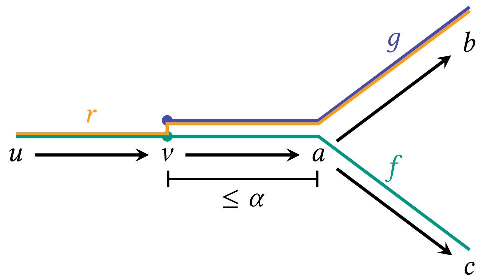

Abbildung 5.13.: Die Situation aus Lemma 5.16. Der Reisende r stellt einen möglichen Grund für den Halt beider Fahrzeuge an v dar. Denn Reisender r steigt an v von f in g um. Mit Lemma 5.13 wissen wir bereits, dass dann g an v starten muss. Mit Lemma 5.16 zeigen wir, dass die gemeinsam gefahrene Strecke nach v höchstens α lang ist.

Diese Situation ist schematisch in Abbildung 5.12 dargestellt. Wir sehen die Menge der an v haltenden Fahrzeug. Wissen wir, dass kein Reisender an v startet oder endet, erhalten wir, dass die Fahrtstrecken unterhalb von v verschieden sind.

Beweis. Seien $G = (V, E)$, R, $v \in V$, L und F wie in den Voraussetzungen. Dann beinhaltet F gerade alle Fahrzeuge, die in L an v halten. Nach Lemma 5.13 wissen wir, dass bis auf ein Fahrzeug $f \in F$ alle Fahrzeuge aus F an v starten. Mit Lemma 5.1 erhalten wir, dass jedes Fahrzeug in F ab v einen Reisenden bedient. Nach Voraussetzung wissen wir aber, dass kein Reisender an v startet oder endet. Da F alle Fahrzeuge beinhaltet, die an v halten, muss es für jedes Fahrzeug $g \in F \setminus \{f\}$ einen Reisenden $r_g \in R$ geben, der an v von f in g umsteigt. Mit Lemma 5.7 und Lemma 5.14 wissen wir weiter, dass alle Fahrzeuge aus F über den Abspaltungspunkt hinaus fahren. Lemma 5.12 liefert außerdem, dass keines der Fahrzeuge aus F unterhalb von v und oberhalb dem Abspaltungspunkt hält. Somit startet oder endet keiner der von einem Fahrzeug aus F bedienten Reisende an einem Knoten auf dem Hals, der unterhalb von v liegt.

Konstruiere eine neue Lösung L': Ersetze f durch ein Fahrzeug f', dass alle Reisenden von F bis zum Abspaltungspunkt und unterhalb dem Abspaltungspunkt weiter die Reisenden aus f bedient. Jedes andere Fahrzeug $g \in F \setminus \{f\}$ ersetzen wir durch ein Fahrzeug g', dass unterhalb dem Abspaltungspunkt alle Reisenden von g bedient. Insbesondere steigen die Reisenden r_g in L' am Abspaltungspunkt von f' in g' um.

Dann ist die Lösung L' besser als die Lösung L: Da keiner der Reisenden von F an v startet oder endet, hält f' nicht an v. Stattdessen finden die $|F|$ Halte jetzt statt an v am Abspaltungspunkt statt. Unterhalb vom Abspaltungspunkt entspricht L' gerade L. Oberhalb übernimmt f' alle Halte aus F. Insgesamt wird die Strecke zwischen v und dem Abspaltungspunkt einmal weniger befahren. Wir erhalten einen Widerspruch zur Optimalität von L. ∎

Lemma 5.16: *Sei $G = (V, E)$ eine Einhals-Spinne, R eine Menge an Reisenden. Sei $v \in V$ und $r \in R$ ein Reisender. Sei L eine optimale Lösung. Seien f und g Fahrzeuge in L, sodass f und g an v halten. Dann fahren f und g unterhalb von v eine Strecke von höchstens α gemeinsam.*

In Abbildung 5.13 sehen wir eine mögliche solche Situation. Der Reisende r steigt an v von f nach g um. Dann erhalten wir, dass die Strecke bis zum Abspaltungspunkt a höchstens α lang ist.

Beweis. Seien $G = (V, E)$, R, $v \in V$, $r \in R$, L, f und g wie in den Voraussetzungen. Da L optimal ist, wissen wir nach Lemma 5.7, dass f und g nach dem Ende der gemeinsamen Strecke verschiedene Kanten befahren. Ihre weitere gemeinsame gefahrene Strecke endet somit am Abspaltungspunkt. Nach Lemma 5.13 wissen wir außerdem, dass f oder g erst an v startet. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit, starte g an v. Angenommen v liegt mehr als α oberhalb dem Abspaltungspunkt.

Dann konstruiere eine neue Lösung L' aus L: Ersetze das Fahrzeug f durch ein neues Fahrzeug f', dass dieselbe Strecke befährt wie f. Das Fahrzeug bedient dann oberhalb dem Abspaltungspunkt alle Reisenden von g und f. Da g erst an v startet und f auch spätestens an v startet, ist das wohldefiniert. Weiter ersetzen wir das Fahrzeug g durch ein neues Fahrzeug g', dass ab dem Abspaltungspunkt startet und unterhalb dieselbe Strecke befährt wie g. Das Fahrzeug g' bedient dann alle Reisenden von g unterhalb dem Abspaltungspunkt.

Dann ist die Lösung L' besser als L: Oberhalb des Abspaltungspunkts, übernimmt f' die Halte von f und g; es entstehen somit keine zusätzlichen Halte. An v hält aber nur noch f' und nicht mehr auch g'. Somit sparen wir einen Halt. Weiter wird auch die Strecke unterhalb von v einmal weniger befahren. Wie sparen also die Strecke zwischen v und dem Abspaltungspunkt von mehr als α. Unterhalb dem Abspaltungspunkt stimmen f' und g' mit f und g überein. Am Abspaltungspunkt benötigen wir allerdings zwei zusätzliche Halte, weil f' und g' in L' hier halten müssen. Diese werden aber durch die gesparte Strecke und den gesparten Halt oberhalb des Abspaltungspunkt mehr als aufgewogen. Somit erhalten wir einen Widerspruch zur Optimalität von L. ∎

Weiter sehen wir ein, dass es für jedes Fahrzeug auch einen Grund gibt, Teil der Gruppe zu sein. So gibt es zumindest ein anderes Fahrzeug, mit dem es sich einen Halt teilt – also zwei Reisende, die am selben Knoten starten beziehungsweise enden –, oder die Zusammenfahrt spart die Strecke für den benötigten Halt am Ende der Zusammenfahrt. Bezeugt durch einen Reisenden, der mindestens eine Strecke von α mit den restlichen Reisenden gemeinsam fährt.

Lemma 5.17: *Sei $G = (V, E)$ eine Einhals-Spinne, R eine Menge an Reisenden. Sei $v \in V$ ein Knoten. Sei L eine optimale Lösung und f, g zwei Fahrzeuge in L, deren Pfad den Knoten v beinhaltet. Gebe es Umstiege an v von f nach g umsteigt. Dann gibt es einen Reisenden $r \in R$, der eine der folgenden Bedingungen erfüllt:*

1. *Der Reisende r startet an v.*
2. *Der Reisende r steigt an v von f nach g um und startet mindestens α höher als v.*
3. *Der Reisende r steigt an v von f nach g um und startet am Start oder Ende eines Reisende, der in f fährt, aber nicht nach g umsteigt.*

Beweis. Seien $G = (V, E)$, R, $v \in V$, L, f und g wie in der Voraussetzung. Weiter existiert nach Voraussetzung einen Reisenden $r \in R$, der an v von f nach g umsteigt. Gebe es keine Reisenden, der an v startet. Gebe es weiter auch keinen Reisenden, der an v von f nach g umsteigt und mindestens α höher startet. Gebe es außerdem keinen Reisenden, der an v von f nach g umsteigt und am Start oder Ende eines Reisenden, der in f fährt und nicht an v in g umsteigt, startet. Dann gilt das alles insbesondere nicht für r. Nach Lemma 5.13 wissen wir, dass g erst an v startet. Nach Lemma 5.12 wissen wir außerdem, dass kein Reisender von f oder g unterhalb von v auf gemeinsamer Strecke startet oder endet.

Konstruiere aus L eine neue Lösung L': Wir ersetzen das Fahrzeug f durch ein neues Fahrzeug f', das nur noch die Reisenden von f bedient, die nicht an v in g umsteigen. Ebenso ersetzen wir das Fahrzeug g durch ein Fahrzeug g', das alle Reisenden von g auf ihrer kompletten Strecke bedient. Insbesondere also die Reisenden, die an v von f in g umsteigen, auf ihrer gesamten Strecke bedient.

Dann ist die Lösung L' besser als die Lösung L: Da die Reisenden von g' keinen Halt mit einem Reisenden aus f' teilen, entstehen keine zusätzlichen Halte. Weiter wissen wir, weil kein Reisender von g' an v startet zusammen mit Lemma 5.13, dass g' nicht an v hält. Da kein Reisender aus g' mindestens α höher als v startet, wissen wir, dass die jetzt zusätzlich von f' und g' gleichzeitig befahrene Strecke kürzer ist als α. Die nicht mehr eingesparte Zusammenfahrt wird also von dem nicht mehr notwenidgen Halt aufgehoben. Ein Widerspruch zur Optimalität von L. ∎

Abschließend wollen wir noch die Erkenntnis darlegen, die den initialen Anstoß zur Algorithmusidee geliefert hat. Betrachten wir die Bildung von Gruppen, so gibt es zwei große Gründe für die Zusammenfahrt: gemeinsame Halte und gemeinsam befahrene Strecke. Ein gemeinsamer Halt ist dabei in gewisser Weise ein recht lokales Phänomen: Zwei oder mehr Fahrzeuge halten am selben Knoten. Bei gemeinsamer Strecke hingegen legen die beteiligten Fahrzeuge längere Streckenstücke zurück. Aufgrund der mangelnden Ausweichmöglichkeiten in der eingeschränkten Struktur einer Einhals-Spinne, kann es in dem Bereich ab 2α über dem Abspaltungspunkt nur eine solche Gruppe geben. Später im Algorithmus werden wir dieser Gruppe den Namen großes Fahrzeug geben. Wie bei Lemma 5.11 ergibt sich aus dem Beweis, dass wir bei einer gefahrenen Strecke von genau α optimale Lösungen finden können, in denen die Fahrzeuge nicht eine Gruppe bilden. Diese können aber immer auch in optimale Lösungen transformiert werden, in denen die Fahrzeuge eine Gruppe bilden.

Lemma 5.18: *Sei $G = (V, E)$ eine Einhals-Spinne, sodass jede Kante von einem Reisenden befahren wird. Seien $(w, \ldots, u, v)$ und $(w', \ldots, u', v')$ Pfade in G. Die Knoten v und v' liegen beide im interessanten Bereich von höchstens 2α oberhalb und nicht unterhalb dem Abspaltungspunkt. Weiter seien (v, a), (v, a'), (v', b) und (v', b') Kanten von G. Seien L eine optimale Lösung und $f, f', \hat{f}, g, g'$ und $\hat{g}$ Fahrzeuge in L. Dabei sei $\hat{f} \neq \hat{g}$, $f \neq f'$ und $g \neq g'$. Es halten außerdem f, f' und $\hat{f}$ an v sowie g, g' und $\hat{g}$ an v'. Weiter befahre $\hat{f}$ den Pfad $(w, \ldots, v)$, f die Kante (v, a), f' die Kante (v, a'), $\hat{g}$ den Pfad $(w', \ldots, v')$, g die Kante (v', b) und g' die Kante (v', b'). Seien weiter r_f und $r_{f'}$ Reisende, sodass r_f und $r_{f'}$ zumindest von w bis v in $\hat{f}$ fahren und dann in f beziehungsweise f' umsteigen. Sei außerdem r_g und $r_{g'}$ Reisende, sodass r_g und $r_{g'}$ zumindest von w' bis v' in $\hat{g}$ fahren und dann in g beziehungsweise g' umsteigen. Dann können nicht die Pfade $(w, \ldots, v)$ und $(w', \ldots, v')$ beide länger als α sein.*

Selbiges gilt auch, wenn wir statt einzelnen Reisenden eine Folge an Reisenden betrachten, die zusammen einen nicht überlappenden Pfad bilden.

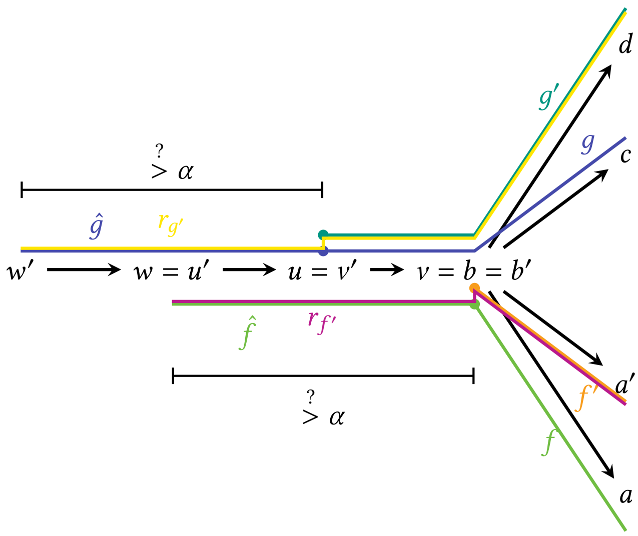

Abbildung 5.14.: Die reduzierte Situation aus Lemma 5.18. Die Fahrzeuge $\hat{f}$ und f sowie $\hat{g}$ und g müssen nicht notwendigerweise übereinstimmen. Dennoch fahren die Fahrzeuge $\hat{f}$ und $\hat{g}$ auf jeden Fall in ein Bein. Der Reisende r_f, der an v von $\hat{f}$ nach f umsteigt, ist nicht dargestellt, da sein Pfad mit dem vom Fahrzeug $\hat{f}$ beziehungsweise f übereinstimmt. Analoges gilt für Reisenden r_g. Auch das genaue Verhältnis der Knoten w, w', u, u', v und v' ist nicht notwendigerweise wie angegeben. Allerdings ist in jedem Fall der Knoten v' höher als v. Auch die Knoten a und a' liegen nicht notwendigerweise in Beinen.

In Abbildung 5.14 sehen wir eine bereits reduzierte Version der Situation. Wir wissen, dass v und v' verschieden und v' oberhalb von v liegt. Somit liegt $b = b'$ im Hals. Auch das genau Verhältnis der Pfade $(w, \ldots, v)$ und $(w', \ldots, v')$ kann von der dargestellten Situation abweichen. Die Fahrzeuge $\hat{f}$ und f sowie $\hat{g}$ und g stimmen nicht notwendigerweise wie dargestellt über. In jedem Fall, enden all diese Fahrzeuge aber in einem Bein.

Beweis. Seien die Variablen gegeben wie in der Voraussetzung. Nach Lemma 5.6 wissen wir, dass v und v' nicht unterhalb dem Abspaltungspunkt liegen. Denn a und a' bzw. b und b' müssen entweder beide im Hals oder auf verschiedenen Beinen liegen. Somit kann ich also die Positionen von v und v' vergleichen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit liege v' nicht unterhalb von v. Da $\hat{f}$ an v und $\hat{g}$ an v' hält, wissen wir mit Lemma 5.13, dass v nicht mit v' übereinstimmt. Es liegt v' somit echt oberhalb von v. Nach Lemma 5.7 wissen wir außerdem, dass die Fahrt von $\hat{g}$ und $\hat{f}$ in verschiedenen Beinen endet. Also insbesondere unterhalb von v. Angenommen es seien nun $(w, \ldots, v)$ und $(w', \ldots, v')$ beide länger als α.

Dann konstruiere aus L eine neue Lösung L': Ersetze $\hat{f}$ durch ein neues Fahrzeug $\hat{f}'$. Dieses Fahrzeug $\hat{f}'$ bedient alle Reisenden von $\hat{f}$ und oberhalb von v auch alle Reisenden von $\hat{g}$. Ersetze ebenso $\hat{g}$ durch ein neues Fahrzeug $\hat{g}'$, das erst an v startet und ab v alle Reisenden von $\hat{g}$ bedient. Dann ist die neue Lösung L' wohldefiniert, weil v unterhalb von v' auf dem Hals liegt.

Die Lösung L' ist besser als die Lösung L: Unterhalb von v stimmen $\hat{f}'$ und $\hat{g}'$ mit $\hat{f}$ und $\hat{g}$ überein. An v muss $\hat{g}'$ einmal zusätzlich halten. Oberhalb von v übernimmt $\hat{f}'$ alle Halte von $\hat{f}$ und $\hat{g}$; hier entstehen keine zusätzlichen Halte. Allerdings wird eine Strecke von mehr als α oberhalb von v einmal weniger befahren. Denn $\hat{g}$ fährt in L von w' bis v, wovon die

Teilstrecke w' bis v' länger als α ist. Ebenso fährt $\hat{f}$ in L von w bis v, eine Strecke von mehr als α. $\hat{f}$ und $\hat{g}$ fahren in L also eine Strecke von mehr als α zusammen, die in L' nur noch von $\hat{f}'$ zurückgelegt wird. Somit erhalten wir einen Widerspruch zu L optimal. ∎

5.2.2. Polynomieller Algorithmus

Als Nächstes stellen wir unseren Ansatz für einen polynomiellen Algorithmus zur Lösung des Problems Fahrzeugzuweisung mit Haltekosten vor. Dieser nutzt allerdings die Annahme, dass es einen polynomiellen Algorithmus für das in Abschnitt 5.2.4 beschriebene Problem Gruppenzusammenfahrt gibt. Im Algorithmus nehmen wir an, dass jede Kante unserer Einhals-Spinnen auch von einem Reisenden befahren wird. Wir werden später zeigen, dass wir diesen Algorithmus einfach auf den allgemeinen Fall erweitern können.

Im Algorithmus nutzen wir zuerst aus, dass nach Lemma 5.6 jedes Bein von nur einem Fahrzeug bedient wird. Dann untersuchen wir den Bereich von 2α oberhalb des Abspaltungspunkts und versuchen Fahrzeuge zusammenzulegen: auf Basis von gemeinsamen Halten, aber auch von mehreren Fahrzeugen befahrener Strecke. Als Grundkonzept dient ein sogenanntes großes Fahrzeug, dass alle Reisenden im oberen Teil des Halses bedient. Das große Fahrzeug ist das einzige Fahrzeug, das einzelne andere Reisende mitnimmt, weil sie ausreichend Strecke miteinander teilen. Dementsprechend handelt es sich bei dem Konzept des großen Fahrzeugs um eine Gruppe mit einem ausgewiesenen Fahrzeug, dass die Reisenden während der Zusammenfahrt bedient. Nach Lemma 5.10 teilt sich das große Fahrzeug nur an einem Knoten auf. Diesen Knoten nennen wir *Trennungsstelle*. Nach Lemma 5.15 ist die Trennungsstelle entweder der Abspaltungspunkt oder ein Start oder ein Ende eines Reisenden. Nach Lemma 5.16 liegt die Trennungsstelle gleichzeitig höchstens α oberhalb dem Abspaltungspunkt. Denn wenn wir die Trennungsstelle nicht auf einen erzwungenen Halt, also Start oder Ende eines Reisenden, legen, verursachen wir einen zusätzlichen Halt. Dieser Halt verursacht zusätzliche Kosten von α. Gleichzeitig kann umso mehr Fahrzeugoperationszeit eingespart werden, je länger die Reisenden zusammenfahren, also je tiefer die Trennungsstelle liegt. Deshalb können wir die Trennungsstelle auf den tiefstmöglichen Punkt verschieben – den Abspaltungspunkt. Der Algorithmus versucht dann dem großen Fahrzeug möglichst viele Reisende zuzuweisen, für die sich die Zusammenfahrt wegen längerer gemeinsamer Strecke oder gemeinsamen Halten lohnt. Auch sonstige Fahrzeuge, die sich Halte teilen, lassen wir zusammenfahren. Zuletzt werden Reisende, deren Fahrzeuge vor dem Abspaltungspunkt enden, noch von einem Fahrzeug bedient, das in ein Bein hinein fährt. Denn je mehr Reisende gemeinsam fahren, desto mehr ausnutzbares Sparpotential gibt es.

Nach der grundsätzlichen Algorithmusidee kommt jetzt noch die konkretere Algorithmusbeschreibung:

Initialisierung Zu Beginn initialisieren wir eine vorläufige Lösung: Jedes Bein wird von einem Fahrzeug bedient und auch jeder Reisende, der nicht in einem Bein fährt, bekommt ein eigenes Fahrzeug.

Erzeuge für jedes Bein B ein Fahrzeug f_B. Das Fahrzeug f_B bedient alle Reisenden R_B, deren Ziel im Bein B liegt. Zumindest vorläufig wird ein Reisender $r \in R_B$ von seinem Start aus von f_B bedient. Das Fahrzeug f_B startet am obersten Start aller Reisenden R_B und fährt den Hals hinunter bis zum Ende des Beins. Zwischendrin hält es an jedem Knoten, an dem einer der Reisenden R_B startet oder endet.

Erzeuge nun für jeden Reisenden, dessen Strecke vollständig im Hals enthalten ist, ein eigenes Fahrzeug. Dieses fährt vom Start zum Ziel des Reisenden.

Das große Fahrzeug Wir erinnern uns: Das große Fahrzeug ist die in einer optimalen Lösung eindeutige Gruppe, die eine Strecke von mehr als α zurücklegt. Eine Gruppe ist eine Menge M an Reisenden, die zusammenfahren. Konkret existiert ein Knoten t, sodass oberhalb von t alle Reisenden aus M in nur einem Fahrzeug fahren. Unterhalb von t fahren die Reisenden aus M in mehreren Fahrzeugen. Wir wollen das Konzept auf Fahrzeuge erweitern, um das algorithmische Vorgehen von zusätzlichen Zusammenfahrten von Reisenden zu beschreiben. Dann besteht die Menge M aus Fahrzeugen. In dem Fall bedeutet die Zusammenfahrt die folgende Änderung der Lösung: Es gibt einen Knoten t, den die Fahrtstrecken aller Fahrzeuge aus M beinhalten. Oberhalb von t fährt nur eines der Fahrzeuge aus M, nennen wir es f_M. Das Fahrzeug f_M bedient alle Reisende, die vorher mit einem der Fahrzeuge aus M gefahren sind. Erst ab t fahren dann auch wieder die restlichen Fahrzeuge aus M und die Reisenden steigen wieder in das Fahrzeug, in dem sie ursprünglich gefahren sind. Wir nennen t Trennungsstelle. Oft bezeichnen wir mit dem großen Fahrzeug auch das Fahrzeug f_M, das oberhalb von t fährt.

Nun wollen wir bestimmen, ob es ein großes Fahrzeug geben sollte. Denn es kann sein, dass es sich nicht lohnt, mit den anderen Fahrzeugen zusammenzufahren, obwohl jeweils der Halt für die anderen Fahrzeuge eingespart wird. Dazu betrachten wir jede mögliche Trennungsstelle und berechnen für diese die beste Lösung. Außerdem berechnen wir noch die Lösung ohne ein großes Fahrzeug und wählen dann die insgesamt beste Lösung aus. Zur Berechnung der Lösung ohne ein großes Fahrzeug lassen wir den aktuellen Schritt zur Berechnung des großen Fahrzeugs weg und fahren mit dem restlichen Algorithmus fort.

Um die beste Lösung für eine Trennungsstelle t zu berechnen, gehen wir wie folgt vor:

Zuerst wählen wir ein beliebiges Fahrzeug, das zumindest α oberhalb der Trennungsstelle startet, aber nach dieser noch weiter fährt, als großes Fahrzeug aus. Alle weiteren Fahrzeuge, die zumindest α oberhalb der Trennungsstelle starten, bilden dann mit dem großen Fahrzeug eine Gruppe. Das heißt, alle Fahrzeuge außer dem großen Fahrzeug, die zumindest α oberhalb der Trennungsstelle starten, fahren erst ab der Trennungsstelle. Die Reisenden, die jetzt oberhalb der Trennungsstelle im großen Fahrzeug fahren, steigen an der Trennungsstelle in das Fahrzeug, in dem sie ursprünglich gefahren sind.

Ebenso fügen wir noch alle Fahrzeuge, die sich einen Halt mit dem großen Fahrzeug teilen, der Gruppe hinzu. Allerdings nur, wenn der geteilte Halt nicht unterhalb der Trennungsstelle liegt. Auch fügen wir ein Fahrzeug f nicht der Gruppe des großen Fahrzeugs hinzu, wenn der geteilte Halt gleichzeitig die Trennungsstelle und Start von f ist. Dies wiederholen wir, bis es keine mit dem großen Fahrzeug geteilte Halte mehr gibt, die die Lösung verändern.

Zusammenfahrt wegen gemeinsamer Halte Neben der Gruppe des großen Fahrzeugs kann es noch weitere Fahrzeuge geben, die sich Halte teilen. Diese müssen wir auch noch zusammenfahren lassen.

Spezifisch bilden wir Gruppen aus Fahrzeugen, die sich transitiv Halte teilen. Allerdings fügen wir ein Fahrzeug f nicht hinzu, wenn der geteilte Halt Start von f ist und Trennungsstelle der Gruppe wäre. Diese neuen Gruppen fahren bis zum letzten Halt der vorherigen Fahrzeuge zusammen. Nun erhalten wir als Teilproblem zu bestimmen, wie die Gruppen, die wir erhalten zusammenfahren. Auch, ob wir die Zusammenfahrt von Gruppen bis zum Abspaltungspunkt verlängern. In Abschnitt 5.2.4 beschäftigen wir uns mit diesem Teilproblem Gruppenzusammenfahrt noch eingehender. Wir betrachten einen Algorithmus für dieses Teilproblem und führen diesen aus.

Ende vor Trennungsstelle Alle Fahrzeuge, die nicht unterhalb der Trennungsstelle enden, werden aus der Lösung entfernt. Ihre Reisenden werden stattdessen vom großen Fahrzeug bedient. Gibt es kein großes Fahrzeug, werden sie stattdessen von dem Fahrzeug bedient, das unter den in ein Bein fahrenden Fahrzeugen am höchsten startet.

Polynomialität

Nun wollen wir noch zeigen, dass der beschriebene Algorithmus sein Ergebnis auch in polynomieller Zeit berechnet.

Satz 5.19: *Der in diesem Abschnitt beschriebene Algorithmus berechnet ohne Beachtung des Algorithmus für das Teilproblem* Gruppenzusammenfahrt *sein Ergebnis in* $\mathcal{O}(|V| \cdot |R| \cdot |E_R|)$.

Beweis. Die Aussage erhalten wir durch einfaches Nachzählen der Operationen des Algorithmuses.

Um die Fahrzeuge für die Beine zu erzeugen, müssen wir für potentiell jeden Reisenden zwei Halte erzeugen. Ebenso für die eigenen Fahrzeuge für die restlichen Reisenden. Außerdem müssen wir den Fahrzeugen die entsprechenden Kanten zuweisen und den Reisenden für die Kanten das Fahrzeug zuweisen. Daraus ergibt sich eine Laufzeit für diesen Schritt von $\mathcal{O}(|E_R|)$.

Dann schauen wir uns jede mögliche Trennungsstelle an, das heißt höchstens $\mathcal{O}(|V|)$ Knoten. Für jede Trennstelle vereinigen wir dann schrittweise Fahrzeuge. Bei jeder Vereinigung können jeweils zwei Fahrzeuge nicht mehr vereinigt werden. Somit kann es höchstens $\mathcal{O}(|R|)$ Vereinigungen geben. Jede der Vereinigungen dauert wie oben maximal $\mathcal{O}(|E_R|)$. Den gleichen Aufwand haben wir nicht nur für jede Trennungsstelle, sondern auch für die Möglichkeit, dass es kein großes Fahrzeug gibt. Somit erhalten wir für die restlichen Schritte insgesamt eine Laufzeit von $\mathcal{O}(|V| \cdot |R| \cdot |E_R|)$.

Es folgt insgesamt die Laufzeit von $\mathcal{O}(|V| \cdot |R| \cdot |E_R|)$. ∎

5.2.3. Optimalität

Nun zeigen wir noch, dass der in Abschnitt 5.2.2 beschriebene Algorithmus eine optimale Lösung berechnet. Dafür setzen wir voraus, dass ein optimaler Polynomialzeit-Algorithmus für das Teilproblem Gruppenzusammenfahrt gegeben ist. Damit folgern wir, dass die optimale Lösung für das Problem Fahrzeugzuweisung mit Haltekosten auf allen Einhals-Spinnen in polynomieller Zeit berechnet werden kann. Ebenfalls unter Voraussetzung eines optimalen Polynomialzeit-Algorithmus für das Teilproblem Gruppenzusammenfahrt.

Satz 5.20: *Sei ein optimaler Polynomialzeit-Algorithmus für das Teilproblem* Gruppenzusammenfahrt *gegeben. Dann berechnet der in Abschnitt 5.2.2 beschriebene Algorithmus eine optimale Lösung für das Problem* Fahrzeugzuweisung mit Haltekosten *auf Einhals-Spinnen, für die jede Kante von einem Reisenden befahren wird.*

Beweis. Sei L_{opt} eine optimale Lösung. Sei weiter L die Lösung, die der Algorithmus berechnet.

Zunächst betrachten wir die Situation, wenn es in den Gruppen des Teilproblems Gruppenzusammenfahrt keine Zusammenfahrt gäbe.

Mit Korollar 5.9 und Lemma 5.6 erhalten wir, dass in L_{opt} wie in L in jedem Bein und ab 2α über dem Abspaltungspunkt nur ein eindeutiges Fahrzeug fährt.

Nach Lemma 5.18 wissen wir, dass es in L_{opt} nur ein Fahrzeug geben kann, das mehrere Reisende mitnimmt, sodass die Zusammenfahrt jeweils den zusätzlichen Halt einspart. In L entspricht dieses Fahrzeug gerade dem großen Fahrzeug. Entsprechend verwenden wir die Terminologie analog für dieses Fahrzeug in L_{opt}. Mit Lemma 5.10 erhalten wir, dass sich das große Fahrzeug auch in L_{opt} nur an einem Punkt aufteilt. Das heißt wir können auch in L_{opt} von einer Trennungsstelle reden. Nach Lemma 5.12 und Lemma 5.15 ist dies der letzte Halt der Reisenden des großen Fahrzeugs oder der Abspaltungspunkt. Mit Lemma 5.7 erhalten wir, dass ab der Trennungsstelle alle Fahrzeuge in L_{opt} bis in ein Bein fahren. Somit liefert uns Lemma 5.16, dass auch in L_{opt} die Trennungsstelle höchstens α oberhalb dem Abspaltungspunkt liegt.

Betrachten wir nun die Iteration des Algorithmus, in der gerade die Lösung für die Trennungsstelle des großen Fahrzeugs in L_{opt} berechnet wird. Nach Konstruktion fahren in L gerade die folgenden Reisenden mit dem großen Fahrzeug: Alle Reisenden, die zumindest α oberhalb der Trennungsstelle starten oder am selben Knoten starten oder enden wie ein anderer Reisender des großen Fahrzeugs. Ebenso alle Reisenden, die im selben Bein enden wie einer dieser Reisenden und bereits oberhalb der Trennungsstelle fahren. Außerdem alle Reisenden, die sich keine Halte mit Reisenden aus den Beinen teilen und nicht unterhalb der Trennungsstelle enden. Ist die Trennungsstelle der Abspaltungspunkt, zusätzlich noch alle Reisenden aus Gruppen, für die sich die Zusammenfahrt insgesamt bis zum Abspaltungspunkt lohnt.

Dann erhalten wir mit Lemma 5.11, das Reisende, die mehr als α oberhalb der Trennungsstelle starten und nicht vor der Trennungsstelle enden, auch in L_{opt} mit dem großen Fahrzeugs fahren. Weiter wissen wir auch, dass, falls ein Reisender in L_{opt}, der genau α oberhalb der Trennungsstelle startet und nicht vor der Trennungsstelle endet, nicht im großen Fahrzeug fährt, die Lösung nicht schlechter wird, wenn er stattdessen im großen Fahrzeug fährt. Mit Lemma 5.13 erhalten wir weiter, dass alle Reisenden, die sich Start oder Ende mit einem anderen Reisenden des großen Fahrzeugs teilen, auch in L_{opt} mit dem großen Fahrzeug fahren. Mit Lemma 5.5 wissen wir selbiges auch für die Reisenden, die im selben Bein enden wie ein Reisender im großen Fahrzeug. Weiter liefert Lemma 5.14, dass jeder Reisender von einem Fahrzeug bedient wird, das in ein Bein fährt. Für Reisende, die mangels geteilter Halte und mangelnder Streckenlänge kein weiteres Einsparpotential generieren, ist es optimal, diese möglichst lange mit anderen zusammenfahren zu lassen. Da das große Fahrzeug die längste Strecke zurücklegt, ist es daher optimal, diese vom großen Fahrzeug fahren zu lassen. Wir können daher annehmen, dass auch in L_{opt} diese Reisenden im großen Fahrzeug fahren.

Die Reisenden, die in L nicht im großen Fahrzeug fahren, fahren in Fahrzeugen, die in ein Bein führen und sich keinen Halt mit dem großen Fahrzeug teilen. Diese Reisenden können entweder bis in ein Bein fahren oder vorher enden. Fahren sie bis in ein Bein, ist dieses insbesondere von allen Beinen verschieden, in die Reisende wollen, die im großen Fahrzeug fahren. Deshalb müssten diese Reisenden aus dem großen Fahrzeug in das Fahrzeug für ihr Bein umsteigen. Entsprechend gilt nach Lemma 5.17, dass diese auch in L_{opt} nicht im großen Fahrzeug fahren. Enden die Reisenden vor dem Abspaltungspunkt, wissen wir, dass diese sich zumindest transitiv einen Halt mit Reisenden teilen, die in ein Bein fahren wollen, in das keiner der Reisenden des großen Fahrzeugs fährt. Ebenso wissen wir, dass keiner dieser Reisenden zumindest α oberhalb der Trennungsstelle startet oder sich einen Halt mit einem Reisenden des großen Fahrzeugs teilt. Somit gilt nach dem selben Argument, dass auch diese Reisenden in L_{opt} ebenso nicht im großen Fahrzeug fahren. Daraus erhalten wir, dass L durch eine andere Reisendenzuweisung zum großen Fahrzeug nicht besser sein kann als die optimale Lösung L_{opt}.

Zuletzt wollen wir noch für die restlichen Reisenden ähnliche Aussagen treffen. Die restlichen Reisenden sind gerade die Reisenden, die nicht im großen Fahrzeug fahren. Für diese gibt es zwei Möglichkeiten: Sie haben gemeinsame Halte mit anderen Reisenden oder nicht.

Im ersten Fall wissen wir nach Lemma 5.13, dass in L_{opt} wie in L alle solchen Reisenden zusammenfahren, die sich einen Halt teilen. Mit Lemma 5.12 und Lemma 5.15 wissen wir weiterhin, dass sich in L_{opt} die gleichen beiden Optionen für das Ende der Zusammenfahrt ergeben wie in L. Ebenso fahren nach Lemma 5.12 und Lemma 5.13 die Gruppen in L_{opt} wie in L nur bis zu ihrem jeweils letzten Halt zusammen. Es sei dennn, nach dem optimalen Algorithmus für das Teilproblem Gruppenzusammenfahrt ist das Ende der Zusammenfahrt auf den Abspaltungspunkt verschoben. Nach Lemma 5.16 und Lemma 5.17 erhalten wir, dass auch alle Reisenden, die in L nicht in diesen Fahrzeugen zusammenfahren, dies auch nicht in L_{opt} tun.

Im zweiten Fall gibt es nochmal zwei weitere Möglichkeiten: Entweder der Reisende endet im Hals oder fährt noch in ein Bein. Endet er im Hals kann es gar kein großes Fahrzeug geben, sonst würden diese in L bereits im großen Fahrzeug fahren. Dann erhalten wir mit Lemma 5.7, dass in L_{opt} wie in L, diese Reisenden von einem im Bein endenden Fahrzeug bedient werden. Da mit dem Fahrzeug, das am höchsten startet, die meiste Strecke geteilt werden kann, ist die erhaltene Einsparung in L und L_{opt} gleich. Fährt er in ein Bein, wissen wir nach Lemma 5.5, dass alle anderen Reisenden in dasselbe Bein an den selben Kanten im selben Fahrzeug sitzen. Ebenso behandelt auch der Algorithmus diese Kanten für den Reisenden wie die anderen Reisenden. Fährt er dennoch nicht erst in einem anderen Fahrzeug als dem seines Beins, wissen wir, dass entweder eine bestehende Zusammenfahrt auch im optimalen Fall vorher endet oder der Algorithmus gar keine Zusammenfahrt erzeugt. Dann teilen sich all diese Reisenden keine Halte mit Reisenden, die in andere Beine wollen und nach Lemma 5.18 und Lemma 5.17 erhalten wir somit, dass diese Reisenden auch in der optimalen Lösung L_{opt} nur im Fahrzeug ihres Beins fahren.

Da der Algorithmus für das Teilproblem Gruppenzusammenfahrt optimal ist, sind auch die restlichen Zusammenfahrten der Gruppen so optimal wie in L_{opt}. Somit erhalten wir insgesamt, dass L_{opt} nicht besser als L ist. Somit ist L bereits optimal. ∎

Mit einem solchen Algorithmus auf Einhals-Spinnen, für die jede Kante von einem Reisenden befahren werden will, können wir dann auch einen Algorithmus angeben, der in polynomieller Zeit eine optimale Lösung für beliebige Probelminstanzen auf Einhals-Spinnen berechnet.

Theorem 5.21: *Unter Annahme eines optimalen Polynomialzeitalgorithmus für das Teilproblem Gruppenzusammenfahrt, existiert ein polynomieller Algorithmus, der für Probleminstanzen des Problems Fahrzeugzuweisung mit Haltekosten auf Einhals-Spinnen eine optimale Lösung berechnet.*

Beweis. Sei $\mathcal{A}$ der Algorithmus für Einhals-Spinnen, sodass jede Kante von einem Reisenden befahren wird, aus Abschnitt 5.2.2. Dabei verwenden wir die Annahme eines optimalen Polynomialzeitalgorithmus für das Teilproblem Gruppenzusammenfahrt. Nach Lemma 5.1 wissen wir, dass auf Kanten, die nicht von Reisenden befahren werden wollen, in einer optimalen Lösung keine Fahrzeuge fahren. Somit zerfällt eine Instanz in höchstens linear-viele Teilinstanzen. Jede dieser Teilinstanzen ist eine Einhals-Spinne, sodass jede Kante von einem Reisenden befahren wird. Somit können wir die Teilinstanzen mit dem Algorithmus $\mathcal{A}$ in polynomieller Zeit optimal lösen können. Insgesamt erhalten wir in polynomieller Zeit eine optimale Lösung für die gesamte Instanz. ∎

5.2.4. Zusammenfahrt von Gruppen

In diesem Abschnitt betrachten wir das Teilproblem aus dem Algorithmus in Abschnitt 5.2.2 genauer. Wir erinnern uns an die Situation: Wir haben bereits viele Reisende zu Gruppen zusammengefasst. Dabei können wir uns sicher sein, dass jeder der Reisenden mit allen Reisenden in der eigenen Gruppe zusammenfahren muss. Außerdem haben wir auch alle Reisenden zu Gruppen zusammengefasst, von denen wir uns sicher sind, dass sie zusammenfahren müssen. Wir wissen auch, dass der Bereich, in dem wir noch etwas entscheiden müssen, klein ist. Denn nur im Bereich von 2α oberhalb des Abspaltungspunkts gibt es noch mehrere Gruppen. Und unterhalb des Abspaltungspunkts fährt nach Lemma 5.6 nur ein Fahrzeug pro Bein. Jetzt stehen wir vor dem Problem, dass wir nicht wissen, welche Reisenden der erhaltenen Gruppen weiter zusammenfahren und welche getrennt bleiben sollten. Wir erhalten ein neues Optimierungsproblem als Teilproblem des Problems Fahrzeugzuweisung mit Haltekosten auf Einhals-Spinnen. Mit Lemma 5.15 und Lemma 5.12 wissen wir, dass zusätzliche Zusammenfahrten der Reisenden der Gruppen weiterhin an einem letzten Halt eines der Reisenden oder dem Abspaltungspunkt enden muss. Nach Lemma 5.13 wissen wir, dass ein geteilter Halt zwischen zwei Gruppen Start der einen und der letzte Halt von beiden Gruppen sein müsste. Da die Gruppe dann aber nichts spart, dürfen die Reisenden gar nicht zusammen in derselben Gruppe fahren. Also wissen wir, dass Gruppen sich keine Halte teilen. Da wir außerdem wissen, dass die bisherigen Gruppen erhalten bleiben, sind für dieses Teilproblem von jeder Gruppe nur Start, Ende der Zusammenfahrt und Anzahl Beine relevant.

Insgesamt erhalten wir das Optimierungsproblem *Gruppenzusammenfahrt*. Eine Instanz besteht aus einem gewichteten, gerichteten Pfadgraphen, skalaren Haltekosten α sowie einer Menge an Gruppen. Die Gewichte jeder Kante sind echt positiv. Jede Gruppe ist gegeben durch zwei Knoten, den Start sowie die Trennungsstelle, und eine Anzahl involvierter Beine. Dabei ist jeder Start und jede Trennungsstelle von jedem anderen Start und jeder anderen Trennungsstelle verschieden. Insbesondere sind auch der Start und die Trennungsstelle einer Gruppe verschieden. Außerdem ist die Strecke zwischen dem zweithöchsten Start und dem tiefsten Punkt höchstens 2α lang. Wir suchen eine Partitionierung der Gruppen in sogenannte Hypergruppen. Jede Hypergruppe besteht aus einer Menge an Gruppen, sowie einer Trennungsstelle. Die Trennungsstelle einer Hypergruppe ist die niedrigste Trennungsstelle einer der enthaltenen Gruppen oder der tiefste Knoten des Pfadgraphens. Allerdings darf nur für maximal eine Hypergruppe die Trennungsstelle mit dem tiefsten Knoten des Graphen übereinstimmen. Die Minimierungsfunktion besteht aus mehreren Summanden. Der erste Summand ist das Produkt der Haltekosten mit der Anzahl an Gruppen, deren Trennungsstelle nicht mit der Trennungsstelle ihrer Hypergruppe übereinstimmen. Der zweite Summand die Summe über alle Hypergruppen von der Strecke von Start der Hypergruppe bis zu ihrer Trennungsstelle. Der dritte und letzte Summand ist die Summe über alle Gruppen von dem Produkt der Anzahl Beine mit der Strecke von der Trennungsstelle der zugeordneten Hypergruppe bis zum tiefsten Knoten des Pfadgraphen.

Betrachten wir eine Einhals-Spinne zusammen mit Gruppen, von denen wir wissen, dass gerade diese Gruppen zusammenfahren müssen. Dann erhalten wir dazu eine Instanz I des Problems Gruppenzusammenfahrt mit denselben Haltekosten. Dann entspricht der tiefste Knoten des Pfadgraphen von I gerade dem Abspaltungspunkt der Einhals-Spinne. Der Hals der Einhals-Spinne liefert uns den Pfadgraphen von I. Die Gruppen in I entsprechen den Gruppen für eine Einhals-Spinne S, von denen wir wissen, dass gerade diese Gruppen zusammenfahren müssen. Der Start einer Gruppe G für S entspricht dem Start des ersten Reisenden der entsprechenden Gruppe in I. Der Knoten, an dem die Zusammenfahrt von

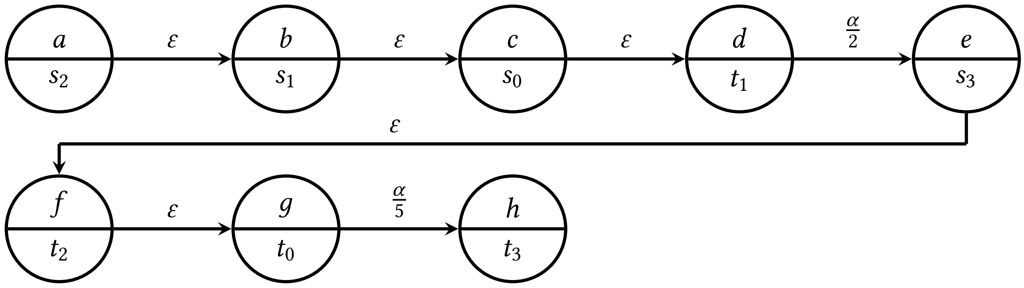

Abbildung 5.15.: Ein Beispiel, in dem die Zusammenfassung in dieselbe Hypergruppe von einer (Hyper-)Gruppe mit immer der besten lohnenswerten (Hyper-)Gruppe eine suboptimales Ergebnis liefert. Für die vier Gruppen g_i mit $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ markieren wir mit s_i den jeweiligen Start und mit t_i die jeweilige Trennungsstelle. Mit ε bezeichnen wir Kantenkosten, die viel kleiner sind als α. Die Anzahl involvierter Beine der Gruppe g_2 ist fünf und die Anzahl involvierter Beine der restlichen Gruppen ist zwei.

G endet, entspricht der Trennungsstelle der entsprechenden Gruppe in I. Und die Anzahl involvierter Beine der entsprechenden Gruppe in I, entspricht gerade der Anzahl verschiedener Beine, in die Reisende aus G fahren. Wir wissen nach Lemma 5.13, dass Gruppen sich keine Halte teilen. Somit sind die Starte und Trennungsstellen in I voneinander verschieden.

Für jede Gruppe auf der Einhals-Spinne bedeutet ein späteres Ende der Zusammenfahrt einen zusätzlichen Halt. Denn der vorherige Halt war noch oberhalb des Abspaltungspunkts und somit ein Start oder Ende eines Reisenden, an dem weiterhin gehalten werden muss. Außerdem stimmen keine zwei Halte der Gruppen auf der Einhals-Spinne überein. Lassen wir Reisende zusammenfahren, befährt ab dem Start des ersten Reisenden ein Fahrzeug die gesamte Strecke bis zum Ende der Zusammenfahrt. Ab dann fährt in jedes Bein ein Fahrzeug, denn in den Beinen fährt nur ein Fahrzeug. Insbesondere fahren auf der restlichen Strecke vom Ende der Zusammenfahrt bis zum Abspaltungspunkt für jedes Bein, in das ein Reisender der Gruppe fährt, ein Fahrzeug. Somit entspricht die Optimierung der Instanz I gerade der Optimierung der Zusammenfahrt der Reisenden aus den Gruppen auf der Einhals-Spinne.

Wir zeigen, dass ein Algorithmus, der eine optimale Lösung für das Problem GRUPPENZUSAMMENFAHRT berechnet, nicht offensichtlich ist. Ein solcher Algorithmus benötigt also eine gewisse Komplexität. Denn die beiden offensichtlichen Möglichkeiten führen nicht zum Erfolg. Zum einen betrachten wir einen Algorithmus $\mathcal{A}$, der mit einer Hypergruppe für jede Gruppe beginnt nacheinander Hypergruppen vereinigt. Der Algorithmus $\mathcal{A}$ vereinigt dabei jede Hypergruppe solange mit der Hypergruppe, mit der die Lösung am meisten besser wird, bis keine Verbesserung mehr erzielt werden kann. Zum anderen betrachten wir einen Algorithmus $\mathcal{B}$, der andersrum mit einer Hypergruppe für alle Reisenden beginnt nacheinander Gruppen aus der Hypergruppe entfernt. Dabei erzeugt der Algorithmus $\mathcal{B}$ eine eigene Hypergruppe für jede Gruppe, für die eine eigene Hypergruppe besser wäre. Wir zeigen gleich, dass weder $\mathcal{A}$ noch $\mathcal{B}$ immer eine optimale Lösung liefert.

Zuerst betrachten wir den Algorithmus $\mathcal{A}$. Wir sehen ein, dass wir nicht immer eine optimale Lösung erhalten, wenn wir mit einer Hypergruppe für jede Gruppe mit aktueller Trennungsstelle starten und dann nacheinander Hypergruppen vereinigen. Wir sehen sogar ein, dass wir immer die beste mögliche Vereinigung wählen können und dennoch keine optimale Lösung erhalten.

Lemma 5.22: *Die in Abbildung 5.15 beschriebene Beispielinstanz liefert in einer Reihenfolge mit Vereinigung mit bester anderer Hypergruppe keine optimale Lösung.*

Beweis. Da die Gruppe g_3 am tiefsten Knoten endet, ist die Trennungsstelle einer Hypergruppe auf dem tiefsten Knoten gleichbedeutend mit einer Zusammenfahrt mit g_3.

Beginnen wir mit der Gruppe g_1. Dann gilt für die Vereinigung mit g_0, dass eine Hypergruppe weniger die Kante (c, d) beinhaltet sowie für zwei Beine die Strecke ab der Trennungsstelle um den Pfad (d, e, f, g) kürzer ist. Dafür untescheidet sich dann die Trennungsstelle der gemeinsamen Hypergruppe von der Trennungsstelle von g_1. Wir erhalten eine Ersparnis von

$$\varepsilon + 2 \cdot \left(\frac{\alpha}{2} + \varepsilon + \varepsilon\right) - \alpha = 5\varepsilon.$$

Bei einer Vereinigung mit der Gruppe g_2, beinhaltet eine Hypergruppe weniger den Pfad (b, c, d) und für zwei Beine verkürzt sich die Strecker ab der Trennungsstelle um den Pfad Kante (d, e, f). Ebenso unterscheidet sich dann die Trennungsstelle der gemeinsamen Hypergruppe von der Trennungsstelle von g_1. Wir erhalten eine Ersparnis von

$$\varepsilon + \varepsilon + 2 \cdot \left(\frac{\alpha}{2} + \varepsilon\right) - \alpha = 4\varepsilon.$$

Bei einer Vereinigung mit der Gruppe g_3, verkürzt sich die Strecke von einem Bein um den Pfad (d, e, f, g, h) und für ein weiteres Bein um den Pfad (e, f, g, h). Auch hier unterscheidet sich die Trennungsstelle der gemeinsamen Hypergruppe von der Trennungsstelle von g_1. Wir erhalten eine Ersparnis von

$$\left(\frac{\alpha}{2} + \varepsilon + \varepsilon + \frac{\alpha}{5}\right) + \left(\varepsilon + \varepsilon + \frac{\alpha}{5}\right) - \alpha = 4\varepsilon - \frac{\alpha}{10}.$$

Insgesamt ist somit die Vereinigung von g_1 mit g_0 am besten und wir erhalten stattdessen die neue Hypergruppe g_0g_1 mit Trennungsstelle g und Start b sowie vier involvierten Beinen.

Als nächstes vereinigen wir die Gruppe g_2. Mit der Hypergruppe g_0g_1 fährt eine Hypergruppe weniger den Pfad (b, c, d, e, f) und für fünf Beine wird die Strecke um die Kante (f, g) kürzer. Zusätzlich weicht dann noch die Gruppe g_2 von der Trennungsstelle der gemeinsamen Hypergruppe ab. Wir erhalten eine Ersparnis von

$$\varepsilon + \varepsilon + \frac{\alpha}{2} + \varepsilon + 5\varepsilon - \alpha = 8\varepsilon - \frac{\alpha}{2}.$$

Mit der Gruppe g_3 fährt eine Hypergruppe weniger die Kante (e, f) und für fünf Beine wird die Strecke um den Pfad (f, g, h) kürzer. Die Trennungsstelle einer gemeinsamen Hypergruppe würde von der Trennungsstelle von Gruppe g_2 abweichen. Wir erhalten eine Ersparnis von

$$\varepsilon + 5 \cdot \left(\varepsilon + \frac{\alpha}{5}\right) - \alpha = 6\varepsilon.$$

Insgesamt ist somit die Vereinigung von g_2 mit g_3 am besten und wir erhalten stattdessen die neue Hypergruppe g_2g_3 mit Trennungsstelle h und Start a sowie sieben involvierten Beinen.

Bleiben noch die Hypergruppen g_0g_1 und g_2g_3. Bei einer Vereinigung dieser beiden Hypergruppen befährt eine Hypergruppe weniger den Pfad (b, c, d, e, f, g). Außerdem beinhaltet die Strecke von vier Beinen die Kante (g, h) weniger. Die Vereinigung der beiden Hypergruppen bedeutet, dass die Trennungsstelle der Vereinigung zusätzlich noch von der Trennungsstelle von g_0 abweicht. Somit erhalten wir eine Ersparnis von

$$\varepsilon + \varepsilon + \frac{\alpha}{2} + \varepsilon + \varepsilon + 4\frac{\alpha}{5} - \alpha = \frac{3}{10}\alpha + 4\varepsilon.$$

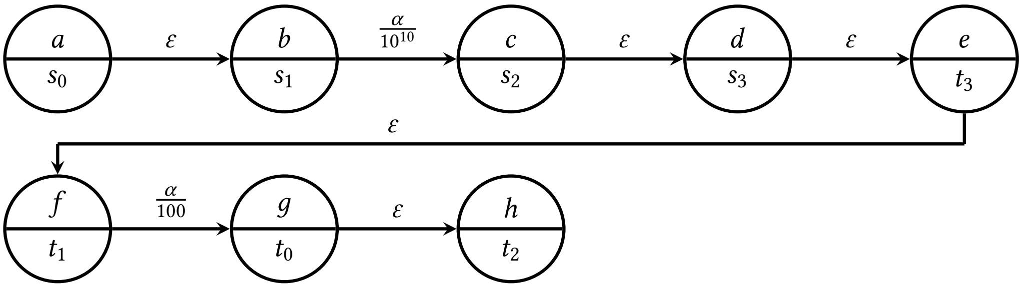

Abbildung 5.16.: Ein Beispiel, in dem das Entfernen von Gruppen aus der Hypergruppe der Vereinigung aller Gruppen eine suboptimale Lösung liefert. Für die vier Gruppen g_i mit $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ markieren wir mit s_i den jeweiligen Start und mit t_i die jeweilige Trennungsstelle. Mit ε bezeichnen wir Kantenkosten, die viel kleiner sind als α. Die Anzahl involvierter Beine der Gruppen g_1 und g_3 ist 100 und die Anzahl involvierter Beine der Gruppen g_0 und g_2 ist zwei.

Somit ist die Vereinigung der beiden Hypergruppen lohnenswert und wir erhalten insgesamt die Hypergruppe $g_0g_1g_2g_3$ mit Start a, Trennungsstelle h und elf involvierten Beinen.

Für die Lösung L, die nur aus der Hypergruppe $g_0g_1g_2g_3$ besteht, fährt nur eine Hypergruppe den kompletten Pfad, somit gibt es auch keine Strecke zwischen Trennungsstelle und tiefstem Knoten. Weiter weicht die Trennungsstelle der Hypergruppe von der Trennungsstelle von drei Gruppen ab. Wir erhalten insgesamt den Wert

$$\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \frac{\alpha}{2} + \varepsilon + \varepsilon + \frac{\alpha}{5} + 3\alpha = \frac{37}{10}\alpha + 5\varepsilon.$$

Betrachten wir alternativ die Lösung L' mit zwei Hypergruppen, eine die der Gruppe g_0 entspricht sowie die Hypergruppe $g_1g_2g_3$, die die restlichen Gruppen enthält. Dann ist die Trennungsstelle der Hypergruppe $g_1g_2g_3$ am Knoten h und der Start an Knoten a. Somit ist die Trennungsstelle von den Gruppen g_1 und g_2 von der Trennungsstelle der Hypergruppe $g_1g_2g_3$ verschieden. Außerdem sind neun Reisende in die Hypergruppe $g_1g_2g_3$ involviert. Wir erhalten einen Wert von

$$\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{2} + \varepsilon + \varepsilon + \frac{2}{5}\alpha\right) + \left(\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \frac{\alpha}{2} + \varepsilon + \varepsilon + \frac{\alpha}{5} + 2\alpha\right) = \frac{36}{10}\alpha + 8\varepsilon.$$

Da ε deutlich kleiner ist als α, ist somit die Lösung L' besser als die Lösung L. Die Lösung L kann also nicht optimal sein. ∎

Jetzt betrachten wir den Algorithmus $\mathcal{B}$. Wir sehen ein, dass wir auch nicht immer eine optimale Lösung erhalten, wenn wir mit einer Hypergruppe der Vereinigung aller Gruppen beginnen und dann alle Gruppen rauswerfen, für die es besser ist, nicht mit den anderen Gruppen vereinigt zu sein.

Lemma 5.23: *Wir betrachten die Beispielinstanz in Abbildung 5.16. Beginnen wir mit einer Hypergruppe mit allen Gruppen und entfernen Gruppen, für die die Vereinigung nicht lohnt, erhalten wir keine optimale Lösung.*

Beweis. Die Hypergruppe $g_0g_1g_2g_3$ involviert 204 Beine. Der Start der Hypergruppe $g_0g_1g_2g_3$ liegt an Knoten a und die Trennungsstelle an Knoten h. Außer für die Gruppe g_2 ist die Trennungsstelle der Gruppe g_i von der Trennungsstelle der Hypergruppe $g_0g_1g_2g_3$ verschieden.

Erstellen wir stattdessen eine neue Hypergruppe für g_0, beinhaltet eine Hypergruppe mehr den Pfad (b, c, d, e, f, g) und zwei Beine beinhalten zusätzlich die Kante (g, h). Dafür stimmt die Trennungsstelle von g_0 jetzt mit der Trennungsstelle seiner Hypergruppe überein. Eine eigene Gruppe für g_0 bietet also einen Vorteil von

$$\alpha - \left(\frac{\alpha}{10^{10}} + \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \frac{\alpha}{100}\right) - 2\varepsilon > 0.$$

Wir erzeugen also eine eigene Hypergruppe für g_0. Dann ist der Start restliche Hypergruppe $g_1g_2g_3$ jetzt an Knoten b und die Trennungsstelle weiterhin an Knoten h. Außerdem sind nur noch 202 Beine involviert.

Eine eigene Hypergruppe für g_1 bedeutet: Eine weitere Hypergruppe beinhaltet den Pfad (c, d, e, f) und 100 Beine beinhalten zusätzlich den Pfad (f, g, h). Die restliche Hyperguppe g_2g_3 startet erst an Knoten c. Außerdem stimmt die Trennungsstelle der Gruppe g_1 mit der Trennungsstelle der eigenen Gruppe überein. Eine eigene Gruppe für g_1 bietet also einen Vorteil von

$$\alpha - (\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon) - 100 \cdot \left(\frac{\alpha}{100} + \varepsilon\right) < 0.$$

Die Lösung bleibt somit unverändert.

Eine eigene Hypergruppe für g_2 bedeutet: Eine weitere Hypergruppe beinhaltet den Pfad (c, d, e, f) und 102 Beine beinhalten zusätzlich den Pfad (f, g, h). Die Trennungsstelle der restlichen Hyperguppe g_1g_3 liegt schon an Knoten f. Außerdem stimmt die Trennungsstelle der Gruppe g_1 mit der Trennungsstelle der eigenen Gruppe überein. Eine eigene Gruppe für g_2 bietet also einen Vorteil von

$$\alpha - (\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon) - 102 \cdot \left(\frac{\alpha}{100} + \varepsilon\right) < 0.$$

Die Lösung bleibt somit unverändert.

Eine eigene Hypergruppe für g_3 bedeutet: Eine weitere Hypergruppe beinhaltet die Kante (d, e) und 100 Beine beinhalten zusätzlich den Pfad (e, f, g, h). Außerdem stimmt die Trennungsstelle der Gruppe g_3 mit der Trennungsstelle der eigenen Gruppe überein. Eine eigene Gruppe für g_3 bietet also einen Vorteil von

$$\alpha - \varepsilon - 100 \cdot \left(\varepsilon + \frac{\alpha}{100} + \varepsilon\right) < 0.$$

Die Lösung bleibt somit unverändert.

Der Wert der so erhaltenen Lösung L mit einer Hypergruppe für g_0 und einer Hypergruppe $g_1g_2g_3$ für die restlichen drei Gruppen hat dann den Wert

$$\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{10^{10}} + \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \frac{\alpha}{100} + 2\varepsilon\right) + \left(\frac{\alpha}{10^{10}} + \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \frac{\alpha}{100} + \varepsilon + 2\alpha\right) = \frac{2}{10^{10}}\alpha + \frac{2}{100}\alpha + 2\alpha + 10\varepsilon.$$

Betrachte stattdessen die Lösung L' mit zwei Hypergruppen g_0g_1 und g_2g_3. Die Hypergruppe g_0g_1 besteht aus den Gruppen g_0 und g_1. Somit ist der Start der Hypergruppe g_0g_1 an Knoten a und die Trennungsstelle an Knoten g. Die Anzahl involvierter Beine ist 102. Die Hypergruppe g_2g_3 besteht aus den Gruppen g_2 und g_3. Somit ist der Start der Hypergruppe g_2g_3 am Knoten c und die Trennungsstelle an Knoten h. Die Anzahl involviert Beine ist ebenfalls 102. Dann erhalten wir für die Lösung L' den Wert

$$\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{10^{10}} + \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \frac{\alpha}{100} + 102\varepsilon + \alpha\right) + \left(\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \frac{\alpha}{100} + \varepsilon + \alpha\right) = \frac{1}{10^{10}}\alpha + \frac{2}{100}\alpha + 2\alpha + 110\varepsilon.$$

Dann ist aber der Wert der Lösung L' geringer als der Wert der Lösung L. Somit kann L nicht optimal sein. ∎

5.3. Out-Trees

Eine weitere Graphenklasse sind die Out-Trees. Out-Trees beschreibt eine Teilklasse der Bäume. Genauer ist ein Out-Tree ein gerichteter Baum, sodass von der Wurzel zu jedem Knoten ein Pfad existiert.

Betrachten wir einen Out-Tree lokal in Blattnähe, ähnelt er einer Einhals-Spinne. Es ist somit naheliegend, einen Algorithmus für Einhals-Spinnen durch sukzessives Lösen von Spinnen zu einem Algorithmus für Out-Trees zu erweitern. In diesem Abschnitt zeigen wir aber, dass wir keinen Algorithmus konstruieren können, der die Lösungen der Spinnen direkt verwendet.

Dazu erinnern wir uns an die Bezeichnung aus Abschnitt 5.2, dass ein Knoten u beziehungsweise ein Bereich B unterhalb eines Knoten v liegt, und erweitern diese auf Out-Trees. Dabei bedeutet die Aussage, dass der Knoten u unterhalb eines Knotens $v \neq u$ liegt, dass der eindeutige Pfad von der Wurzel zu u durch den Knoten v geht. Analog gilt für einen zusammenhängenden Teilgraph B, dass dieser unterhalb des Knotens v liegt, wenn jeder Knoten von B unterhalb von v liegt. Auch definieren wir den Begriff für eine Kante (u, v). Eine Kante (u, v) ist unterhalb eines Knotens w, wenn u unterhalb des Knotens w liegt oder mit diesem übereinstimmt. Wir bezeichnen die Kante (u, v) als direkt unterhalb des Knotens u.

Damit definieren wir *Spinnenenden*. Spinnenenden sind eine formale Beschreibung der Beobachtung, dass Out-Trees lokal in Blattnähe Einhals-Spinnen ähneln.

Definition 5.24: *Sei v ein maximal von der Wurzel entfernter Knoten von Grad größer 2. Das heißt, auf jedem Pfad, der v beinhaltet, ist v der letzte Knoten von Grad größer 2. Insbesondere ist v nicht zwingend der Knoten von Grad größer 2 von maximaler Distanz zu der Wurzel. Sei weiter u der letzte Knoten auf dem Pfad von der Wurzel zu v aber noch vor v, der einen Grad größer 2 hat. Gibt es auf dem Pfad von der Wurzel zu v neben v keinen Knoten von Grad größer 2, so setze stattdessen u auf die Wurzel. Sei nun R die Menge aller Reisenden, deren Strecke zumindest teilweise unterhalb v liegt. Sei weiter G der Teilgraph aller Knoten und Kanten, die von zumindest einem Reisenden von R befahren werden. Dann ist G eine Einhals-Spinne und der ursprüngliche Graph ohne G noch immer ein Out-Tree. Weiter erhalten wir mit G und R ein Teilproblem unseres ursprünglichen Problems. Wir nennen dieses Teilproblem* Spinnenende. *Den Knoten u nennen wir* Anfang des Spinnenendes.

Die Kante direkt unterhalb des Anfangs eines Spinnenendes ist nach Defintion nur Teil dieses einen Spinnenendes. Angenommen es gibt einen Algorithmus $\mathcal{A}$, der sukzessive Spinnenenden löst und deren optimale Lösungen zu einer gesamten optimalen Lösung erweitert. Wie wir gleich zeigen, kann $\mathcal{A}$ – selbst unterhalb des Anfangs des Spinnendes – nicht unbedingt eine optimale Lösung des Spinnenendes unverändert wiederverwenden. Wir sehen also ein, dass der Algorithmus $\mathcal{A}$ die optimalen Lösungen der Spinnenenden weitergehend bearbeiten muss, um eine optimale Lösung zu erhalten. Insbesondere gibt es keinen Algorithmus, der sukzessive Spinnenenden löst und aus der Zusammensetzung dieser Teillösungen direkt eine optimale Lösung erhält.

Satz 5.25: *Sei L_S eine optimale Lösung des Spinnenendes S der Instanz aus Abbildung 5.17. Sei weiter L eine optimale Lösung der gesamten Instanz. Dann fahren die Reisenden r_1 und r_2 in L_S an der Kante (b, d) in einem gemeinsamen Fahrzeug, aber nicht in L.*

Beweis. Wir betrachten die in Abbildung 5.17 beschriebene Beispielinstanz. Es sei ε deutlich kleiner als α. Dann besteht das einzige Spinnenende S aus dem Teilgraphen ohne den Knoten c und zugehörige Kante (b, c) sowie den Reisende r_1 und r_2.

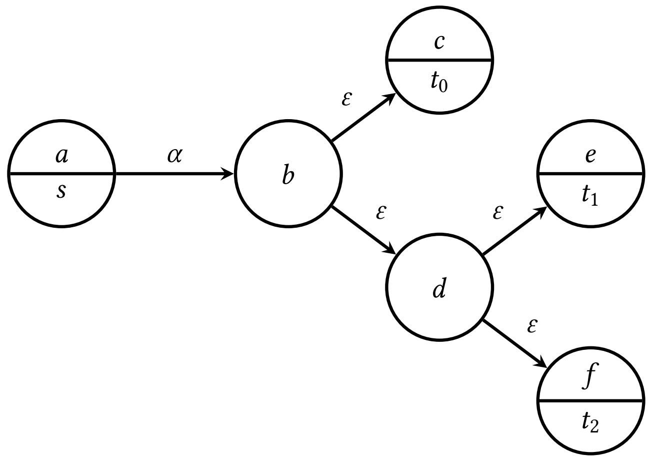

Abbildung 5.17.: Alle Reisenden starten an Knoten a markiert mit s. Das einzige Spinnenende S der Instanz beinhaltet die Reisende r_1 und r_2 sowie den Graphen ohne den Knoten b und die zugehörige Kante (a, b). Dann fahren in einer optimalen Lösung von S r_1 und r_2 an (b, d) zusammen, aber in nicht in einer optimalen Lösung von der gesamten Instanz.

Nach Lemma 5.4 wissen wir, dass eine mögliche Zusammenfahrt von den Reisenden in einer optimalen Lösung von S an a beginnen muss. Weiter wissen wir nach Lemma 5.15, dass eine mögliche Zusammenfahrt der beiden Reisenden in einer optimalen Lösung von S bis zum Knoten d anhält. Uns bleiben also noch zwei mögliche Klassen für eine optimale Lösung von S: Erstens beide Reisenden fahren in getrennten Fahrzeugen, oder zweitens die beiden Reisenden fahren bis d in einem gemeinsamen Fahrzeug, bevor einer der beiden Reisenden in ein eigenes Fahrzeug umsteigt. Sei L'_S eine Lösung, in der beide Reisenden in getrennten Fahrzeugen fahren. Sei weiter L_S eine Lösung, in der die beiden Reisenden r_1 und r_2 bis d in einem gemeinsamen Fahrzeug fahren. Dann steigt einer der beiden Reisenden in L_S an d in ein eigenes Fahrzeug um.

Dann gibt es in der Lösung L'_S vier Halte – für jeden Start und jedes Ende eines Reisenden einen. Weiter befahren die zwei Fahrzeuge jeweils eine Strecke von $\alpha + \varepsilon + \varepsilon$. Insgesamt erhalten wir für L'_S einen Wert von

$$\hat{c}_{S'} = 2 \cdot (\alpha + 2\varepsilon) + 4\alpha = 6\alpha + 4\varepsilon.$$

In der Lösung L_S gibt es fünf Halte: Einen für den gemeinsamen Start, zwei für den Umstieg und je einen für die beiden Enden. Ein Fahrzeug befährt neben dem Bein eines der Reisenden noch die gemeinsam befahrene Strecke, also wie in L_S eine Strecke von $\alpha + 2\varepsilon$. Das andere Fahrzeug befährt nur die Strecke im Bein, also nur eine Strecke von ε. Insgesamt erhalten wir für L_S einen Wert von

$$\hat{c}_S = \alpha + 2\varepsilon + \varepsilon + 5\alpha = 6\alpha + 3\varepsilon.$$

Folglich ist die Lösung L_S für S optimal.

Betrachte die folgende Lösung L auf der gesamten Instanz. Alle Reisenden fahren in einem gemeinsamen Fahrzeug die Kante (a, b). Dann steigen die beiden Reisenden r_1 und r_2 in eigene Fahrzeuge für ihre restliche Strecken um. Reisender r_0 verbleibt für seine restliche Strecke im gemeinsamen Fahrzeug. Dann fährt das gemeinsame Fahrzeug die Strecke (a, b, c) und hält an jedem Knoten: am gemeinsamen Start, für den Umstig und das Ende von r_0. Die Fahrzeuge, die die Reisenden r_1 und r_2 unterhalb von b bedienen, fahren jeweils eine Strecke von 2ε und halten nur an Start und Ende. Es ergibt sich für die Lösung ein Wert von

$$\hat{c}_L = \alpha + \varepsilon + 2\varepsilon + 2\varepsilon + (3 + 2 + 2) \cdot \alpha = 8\alpha + 5\varepsilon.$$

Die einzige in L ungenutzte Zusammenfahrt ist die Kante (b, d). Fahren in einer Lösung r_1 und r_2 an (b, d) zusammen, so brauchen wir entweder mindestens einen Halt mehr oder es fahren zwei Fahrzeuge an der Kante (a, b). Durch die gemeinsam gefahrene Kante wird eine Strecke von ε von einem Fahrzeug weniger befahren. Eine Lösung, in der r_1 und r_2 an (b, d) wie in L_S in einem gemeinsamen Fahrzeug fahren, ist also schlechter als die Lösung L. Somit können die Reisenden r_1 und r_2 in keiner optimalen Lösung der gesamten Instanz an (b, d) in einem gemeinsamen Fahrzeug fahren. Anders als in der optimalen Lösung L_S des Spinnenendes. ∎

6. Reisendeneinschränkung

In Kapitel 5 diskutieren wir die Möglichkeit das Problem einzuschränken, indem wir uns auf bestimmte Graphenklassen einschränken. In diesem Kapitel schränken wir den anderen Teil einer Probleminstanz ein: die Reisenden. Konkret schränken wir ein, wie viele Reisenden sich begegnen können. Dann betrachten wir, wie eine solche Instanz lokal für einen Reisenden aussieht. Damit konstruieren wir dann einen polynomiellen Algorithmus, der eine optimale Lösung berechnen kann.

Die Instanzen nennen wir *Einzelhaushalt*. In einem Einzelhaushalt beginnt und endet für jeden Reisenden r der Pfad p_r an Knoten, die nur im Pfad dieses Reisenden vorkommen. Daher auch der Name Einzelhaushalt. Weiter fordern wir, dass jeder Knoten nur in Pfaden von maximal zwei Reisenden vorkommen.

In Abbildung 6.1 finden wir eine schematische Darstellung der Situation aus der Sicht eines Reisenden. Wie wir nach Lemma 5.1 wissen, sind für eine optimale Lösung nur die von Reisenden befahrenen Kanten relevant. Entsprechend fehlen eventuelle weitere Kanten in Abbildung 6.1. Da die Starts und Enden nur in den Pfaden eines Reisenden vorkommen, fährt jeder Reisende wie abgebildet getrennt auf eine gemeinsame Strecke zu. Weiter ist jeder Knoten nur in der Strecke von maximal zwei Reisenden enthalten. Deswegen können keine Teilpfade der Reisendenpfade entstehen, die von mehr als drei Reisenden bereist werden. Anders als abgebildet, können Reisende sich auch mehrmals eine Strecke teilen. Allerdings sind die geteilten Strecken voneinander unabhängig: Da jeder Reisender einen Knoten nur einmal besucht steht zwischen zwei gemeinsamen Streckenstücke zweier Reisende, auch bei beiden Reisenden mindestens ein Streckenstück, auf dem sie alleine fahren. Zwei geteilte Streckenstücke mit demselben Reisenden sind also nicht von zwei mit zwei verschiedenen Reisenden geteilten Streckenstücken unterscheidbar. Weiter können sich auch Reisende einen Knoten teilen, ohne sich Kanten zu teilen. In dem Fall ist keine Möglichkeit der Verbesserung vorhanden, da um diesen geteilten Knoten nur genau für jeden der beiden Reisenden zwei Kanten liegen, die nur von diesem Reisenden befahren werden. Entsprechend findet sich diese Situation nicht in Abbildung 6.1.

Soll ein geteiltes Stück von zwei Reisenden r und r' im selben Fahrzeug zurückgelegt werden, entstehen dadurch vier neue Halte. Denn die beiden Fahrzeuge der Reisenden müssen einmal anhalten damit ohne Beschränkung der Allgemeinheit r' zu r steigen kann und noch ein weiteres Mal anhalten, damit r' wieder auf seine Strecke zurück umsteigen kann. Durch solche vier Halte lässt sich jeder beliebige nicht leere Teilpfad der gemeinsamen Strecke einsparen. Demzufolge ist die einzige Entscheidung, die wir für eine optimale Lösung treffen müssen, ob wir vier Halte aufwenden wollen, um die komplette gemeinsame Strecke einmal weniger zu befahren, oder die Strecke zweimal befahren wollen. Da keine der Knoten auf geteilten Strecken übereinstimmen, lassen sich auch keine Halte durch gemeinsame Zusammenfahrt mehrerer gemeinsamer Strecken sparen. Deshalb sind diese Entscheidungen unabhängig voneinander.

Mit diesen Erkenntnissen zeigen wir nun die polynomielle Berechenbarkeit einer optimalen Lösung.

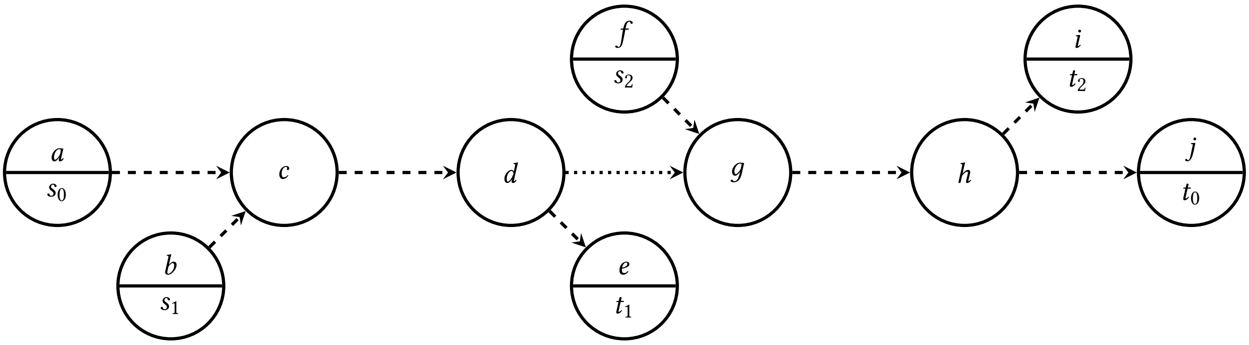

Abbildung 6.1.: Eine schematische Darstellung eines Einzelhaushalts aus Sicht des Reisenden r_0. Die gestrichelten Linien zwischen den Knoten symbolisieren möglicherweise mehrere Kanten. Für unsere Zwecke könnte es sich aber genauso gut um eine Kante handeln. Die gestrichelte Linie zwischen d und g symbolisiert, dass sich diese Situation beliebig oft wiederholen kann. Wie hier gezeigt, kann sich r_0 Strecken mit zwei Reisenden teilen. Genauso aber auch mit keinem, einem, drei oder einer anderen natürlichen Anzahl.

Satz 6.1: *Für einen Einzelhaushalt lässt sich in linearer Zeit eine optimale Lösung berechnen.*

Beweis. Wie wir zuvor gezeigt haben, kommen für jede geteilte Strecke nur zwei Möglichkeiten infrage: Nichts oder alles teilen. Weiter sind die Entscheidungen zwischen diesen zwei Möglichkeiten unabhängig voneinander. Folglich lässt sich eine optimale Lösung bestimmen, indem alle Reisenden in einer beliebigen Reihenfolge iteriert werden. Für jedes inklusionsmaximale geteilte Streckenstück des Reisenden r wird die Entscheidung der Zusammenfahrt getroffen. Fahren die beiden Reisenden r und r' zusammen, übernimmt das Fahrzeug von r die geteilte Strecke. Das Fahrzeug von r' wird in zwei Fahrzeuge aufgeteilt, wovon das eine vor dem geteilten Streckenstück und das andere nach dem geteilten Streckenstück fährt.

Da es keinen Unterschied macht, ob r bei r' oder r' bei r mitfährt, werden die Entscheidungen lokal optimal getroffen. Da die Entscheidungen unabhängig voneinander sind, ermitteln wir insgesamt eine optimale Lösung.

Wir betrachten für jeden Reisenden jede Kante einmal und treffen dabei Entscheidungen über die Zusammenfahrt. Deshalb berechnet dieser Algorithmus seine Lösung in linearer Zeit $\mathcal{O}(|E_R|)$. ∎

7. Problemvariante paarweise Zusammenfahrt

In diesem Kapitel betrachten wir die Problemvariante *Fahrzeugzuweisung mit Haltekosten und paarweiser Zusammenfahrt*. Die Problemvariante Fahrzeugzuweisung mit Haltekosten und paarweiser Zusammenfahrt ist das Problem Fahrzeugzuweisung mit Haltekosten mit der zusätzlichen Einschränkung, dass jeder Reisende nur mit einem anderen zusammenfahren kann. Formell bedeutet das, dass jeder Reisende nur maximal ein Fahrzeug benutzt, das von mehr als einem Reisenden benutzt wird. Weiter darf jedes Fahrzeug nur von maximal zwei Reisenden benutzt werden.

Dadurch muss auch in einer Situation wie in Abbildung 7.1, wo die Pfade dreier Reisender direkt aufeinander folgen, eine Lösung aus mindestens zwei Fahrzeugen bestehen. Wir müssen also für jeden Reisenden maximal einen Teilpfad auswählen, den dieser mit einem anderen Reisenden teilt. Deshalb bietet es sich an, die Problemvariante auf das Problem Maximum Weight Matching zu reduzieren.

Eine Instanz des Problems Maximum Weight Matching ist ein gewichteter, ungerichteter Graph [Kor08, vgl. S. 281]. Ein Matching ist eine Menge paarweise disjunkter Kanten [Kor08, S. 18]. Eine Lösung des Problems Maximum Weight Matching ist ein Matching mit maximalem Gewicht [Kor08, vgl. S. 281]. Eine Lösung für das Problem *Maximum Weight Matching* kann in kubischer Zeit berechnet werden [Kor08, S. 281].

Konstruktion 7.1: *Sei I eine Instanz der Problemvariante Fahrzeugzuweisung mit Haltekosten und paarweiser Zusammenfahrt. Dann konstruieren wir die folgende Instanz H des Problems Maximum Weight Matching.*

Die Reisenden der Instanz I bilden die Knoten des Graphen H. Seien r und r' zwei Reisende in I. Dann sind diese beiden Reisenden in H durch eine Kante verbunden genau dann, wenn r und r' zusammenfahren können. Das Gewicht der Kante $\{r, r'\}$ entspricht der größten Verbesserung einer Lösung durch die Zusammenfahrt von r und r'.

Um die bestmögliche Zusammenfahrt zwischen r und r' zu bestimmen, betrachten wir den Teilgraphen S des Graphen aus I, der durch die Vereinigung von p_r und $p_{r'}$ gegeben ist. Da r und r' jeweils nur mit einem anderen Reisenden zusammen fahren dürfen, ist für die Zusammenfahrt zwischen p_r und $p_{r'}$ nur der Teilgraph S relevant. Wir betrachten jede mögliche Zusammenfahrt zwischen r und r'. Für jede mögliche Zusammenfahrt z bestimmen wir die gesparte Strecke s_z und die dafür benötigten Halte h_z. Teilen sich r und r' Halte, kann die Anzahl benötigter Halte auch negativ sein. Dann gibt $c_z := s_z - \alpha h_z$ die Verbesserung durch die Zusammenfahrt z an. Dann bestimmen wir die Zusammenfahrt z, für die c_z maximal ist. Somit erhalten wir das Gewicht c_z der Kante $\{r, r'\}$.

Satz 7.2: *Die Problemvariante Fahrzeugzuweisung mit Haltekosten und paarweiser Zusammenfahrt ist in $\mathcal{O}(|R|^3 + |R|^2|V|^2 + |E_R|)$ lösbar.*

Beweis. In Konstruktion 7.1 haben wir gesehen, dass wir eine Instanz I der Problemvariante Fahrzeugzuweisung mit Haltekosten und paarweiser Zusammenfahrt in eine Instanz H des Problems Maximum Weight Matching transformieren können. In der Konstruktion

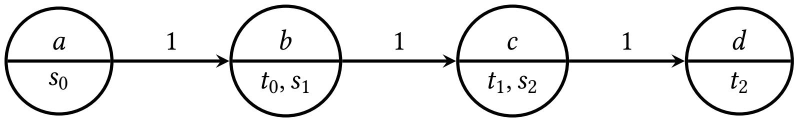

Abbildung 7.1.: Ein Pfad, der aufeinanderfolgend von drei Reisenden befahren wird. In der Problemvariante Fahrzeugzuweisung mit Haltekosten und paarweiser Zusammenfahrt dürfen nicht alle drei Reisende vom selben Fahrzeug bedient werden.

betrachten wir für jedes Paar an Reisenden jede mögliche Zusammenfahrt. Da eine mögliche Zusammenfahrt einen Teilpfad des Pfads beider Reisenden darstellt, gibt es nur quadratisch viele mögliche Zusammenfahrten. Somit ergibt sich eine Laufzeit der Transformation von $\mathcal{O}(|R|^2|V|^2)$. Weiter ist die Laufzeit der Berechnung einer Lösung der transformierten Instanz kubisch in der Anzahl an Knoten. Da die Reisenden die Knoten der Instanz H bilden, können wir eine Lösung für H in $\mathcal{O}(|R|^3)$ Zeit bestimmen.

Betrachten wir eine Lösung L_H der Instanz H, so können wir daraus auch eine Lösung L_I der Instanz I rekonstruieren. Wähle für jede Kante aus dem Matching der Lösung L_H die Zusammenfahrt z, die zu dem Gewicht dieser Kante geführt hat. Alle Reisenden, die in keiner ausgewählten Zusammenfahrt vorkommen, werden von einem eigenen Fahrzeug bedient. Bei einer Zusammenfahrt fahren die beiden beteiligten Reisenden außerhalb der zusammengefahrenen Strecke in einem eigenen Fahrzeug. Dabei fährt einer der beiden Reisenden immer im selben Fahrzeug, das auch das gemeinsam genutzte Fahrzeug während der Zusammenfahrt ist. Somit erhalten wir eine gültige Lösung für das Problem Fahrzeugzuweisung mit Haltekosten. Da zusätzlich für jeden Reisenden nur eine Kante, also eine Zusammenfahrt, ausgewählt wird, erhalten wir sogar eine gültige Lösung für die Problemvariante Fahrzeugzuweisung mit Haltekosten und paarweiser Zusammenfahrt. Zuletzt haben wir für jedes Reisendenpaar die optimale Wahl der Zusammenfahrt für H gewählt. Denn jede Zusammenfahrt z spart einmal s_z Strecke für Kosten von αh_z. Da eine Lösung L_H ein gewichtsmaximales Matching ist, erhalten wir somit, dass die rekonstruierte Lösung L_I eine optimale Lösung von I ist.

In der Rekonstruktion müssen wir jeden Reisenden nur einmal betrachten, um alle Zusammenfahrten zu ermitteln. Weiter können wir mitden Zusammenfahrten direkt die Fahrzeuge und die Zuweisung der Reisenden auf die Fahrzeuge angeben. Somit ist die Rekonstruktion linear in $|E_R|$. Insgesamt folgt die geforderte Laufzeit von $\mathcal{O}(|R|^3 + |R|^2|V|^2 + |E_R|)$. ∎

8. ILP-Formulierung

In diesem Kapitel geben wir eine Reduktion des Problems Fahrzeugzuweisung mit Haltekosten auf das Problem Integer Linear Programming (kurz ILP) an. Da ILP ein extensiv untersuchtes Problem ist, erhalten wir somit einen allgemeinen Lösungsansatz [CL25]. Eine Instanz des Problems ILP besteht aus einer Menge an Integer-Variablen, einer Menge an affinen Nebenbedinungen an diese Variablen und einer affinen Minimierungsfunktion [Wil09, vgl. S. 25, 35]. Eine affine Nebenbedinung ist eine Linearkombination der Variablen, die in Verhältnis zu einer Konstanten gesetzt wird [Wil09, vgl. S. 25]. Also von der Form:

$$\sum_i a_i x_i \leq d.$$

Durch Multiplikation mit -1 lässt sich auch „$\geq$“ darstellen. Ebenso können wir durch die Kombination von „$\leq$“ und „$\geq$“ auch ein „$=$“ darstellen [Wil09, vgl. S. 26]. Eine 0-1-Variable ist eine Variable, deren Wertebereich auf $\{0, 1\}$ beschränkt ist. Wie in unserem Fall sind 0-1-Variablen die in Praxis am meisten verwendeten Integer-Variablen [Wil09, vgl. S. 49].

Um die Reduzierbarkeit auf ILP zu zeigen, werden wir zunächst aus einer Instanz des Problems Fahrzeugzuweisung mit Haltekosten in polynomieller Zeit eine Instanz des Problems ILP konstruieren. Dann werden wir zeigen, dass wir aus der Lösung des transformierten Problems eine Lösung für unser ursprüngliches Problem erhalten. Zuletzt zeigen wir, dass die Optimalität während der Transformation erhalten bleibt.

Die Idee der Transformation beruht auf der Erkenntnis, dass jeder Reisender an jeder Kante nur in höchstens einem Fahrzeug sitzen kann. Hätten wir ein Fahrzeug, dass sich zusätzlich zur Befolgung eines Pfads teleportieren könnte, müsste dieses höchstens $|E_R|$ Kanten befahren. Für jeden Reisenden jede seiner Kanten. Die Größe $|E_R|$ ist aber linear in der Eingabe, sodass wir ein solches Meta-Fahrzeug betrachten können. Zur Transformation der Lösung erzeugen wir immer ein neues Fahrzeug, wenn sich das Meta-Fahrzeug teleportiert.

Zur Konstruktion der Lösung wollen wir zunächst sicherstellen, dass unser Meta-Fahrzeug auch eine Menge an Pfaden zurücklegt; also wohldefinierte Fahrzeuge beschreibt. Weiter stellen wir sicher, dass Reisende alle ihre Kanten von einem Fahrzeug bedient bekommen. Dann definieren wir Variablen, die die Anzahl Halte berechnen. Mit diesen Variablen stellen wir dann noch die Minimierungsfunktion auf.

Konstruktion 8.1: *Sei eine Instanz $G = (V, E)$, R und α des Problems Fahrzeugzuweisung mit Haltekosten gegeben. Dann konstruieren wir die folgende ILP-Instanz.*

Für jeden Schritt des Meta-Fahrzeugs $i \in \{0, \ldots, |E_R|\} =: M$ benötigen wir die Information an welcher Kante das Fahrzeug fährt. Entsprechend fügen wir für jede Kante $e \in E$ und jeden Schritt $i \in M$ die 0-1-Variabel $f_{i,e}$ ein. Die Variable $f_{i,e}$ ist eins genau dann, wenn das Meta-Fahrzeug am i-ten Schritt Kante e befährt. Da das Fahrzeug zu jedem Schritt nur eine Kante befahren kann, benötigen wir für jedes $i \in M$ die Einschränkung

$$\sum_{e \in E} f_{i,e} \leq 1.$$

Weiter muss jeder Reisende an jeder Kante von einem Fahrzeug bedient werden. Entsprechend führen wir für jeden Schritt $i \in M$, jeden Reisenden $r \in R$ und jede Kante e von p_r die 0-1-Variable $z_{r,e,i}$ ein. Die Variable $z_{r,e,i}$ ist eins genau dann, wenn Reisender r an Kante e im i-ten Schritt des Meta-Fahrzeugs fährt. Dann muss jede Kante eines jeden Reisenden von genau einem Schritt des Meta-Fahrzeugs bedient werden. Entsprechend erhalten wir für jeden Reisenden r und jede Kante e seines Pfads p_r die Einschränkung

$$\sum_{i \in M} z_{r,e,i} = 1.$$

Gleichzeitig muss das Meta-Fahrzeug im jeweiligen Schritt auch die entsprechende Kante befahren. Wird also ein Reisender r an einer Kante e im i-ten Schritt des Meta-Fahrzeugs bedient, so befährt das Meta-Fahrzeug im i-ten Schritt die Kante e. Somit erhalten wir für jeden Reisenden r, jede Kante e seines Pfads p_r und jeden Schritt $i \in M$ des Meta-Fahrzeugs die Einschränkung

$$f_{i,e} - z_{r,e,i} \geq 0.$$

Jetzt haben wir sichergestellt, dass das Meta-Fahrzeug eine Abfolge an Kanten befährt und jeder Reisenden r an jeder Kante e in p_r von genau einem Schritt des Meta-Fahrzeugs bedient wird, zu dem auch die Kante e vom Meta-Fahrzeug befahren wird. Eine Lösung der bisherigen Instanz lässt sich also schon in eine korrekte Lösung des Problems Fahrzeugzuweisung mit Haltekosten transformieren. Allerdings fehlt die Betrachtung der zu minimierenden Funktion. Ebenso wie die Definition der Halte.

Für jeden Schritt kann ein Halt vor oder nach der Kante erfolgen. Da der Halt von der befahrenen Kante abhängt, führen wir für eine Kante $e \in E$ und einen Schritt $i \in M$ die neuen 0-1-Variablen $h_{i,e}$ und $H_{i,e}$ ein. Die Variable $h_{i,e}$ gibt an, dass das Meta-Fahrzeug während es im i-ten Schritt die Kante $e = (u, v)$ befährt am Knoten u hält. Die Variable $H_{i,e}$ gibt analog an, dass das Meta-Fahrzeug während es im i-ten Schritt die Kante $e = (u, v)$ befährt am Knoten v hält. Da das Fahrzeug nur halten kann, wenn es die Kante auch befährt, erhalten wir die Einschränkungen

$$f_{i,e} - h_{i,e} \geq 0 \text{ und}$$
$$f_{i,e} - H_{i,e} \geq 0.$$

Für jeden Reisenden $r \in R$ muss das Meta-Fahrzeug vor dem Schritt, in dem es die erste Kante $e = (u, v)$ des Reisenden r bedient, also am Start v halten. Hieraus ergibt sich für jeden Schritt $i \in M$, jeden Reisenden $r \in R$ und dessen erste Kante e die Einschränkung

$$h_{i,e} - z_{r,e,i} \geq 0.$$

Analog muss das Meta-Fahrzeug nach dem Schritt, der die letzte Kante eines Reisenden $r \in R$ bedient, an dessen Ziel, also nach der Kante halten. Wir erhalten für jeden Schritt $i \in M$, jeden Reisenden $r \in R$ und dessen letzte Kante e die Einschränkung

$$H_{i,e} - z_{r,e,i} \geq 0.$$

Zuletzt muss das Meta-Fahrzeug auch zu Schritten halten, zu denen Reisende umsteigen. Ein Umstieg ist daran erkennbar, dass die bedienenden Schritt eines Reisenden einen Sprung machen. Somit erhalten wir für jeden Schritt $i \in M$, jeden späteren Schritt $j \in M \setminus \{0, \dots, i, i+1\}$, jeden Reisenden $r \in R$ und jedes aufeinanderfolgende Kantenpaar e, e' im Pfad p_r des Reisenden die Einschränkungen

$$H_{i,e} - f_{i,e} - f_{j,e'} \geq -1 \text{ und}$$
$$h_{j,e'} - f_{i,e} - f_{j,e'} \geq -1.$$

Ebenso erforderlich ist ein Umstieg, wenn ein Reisender die Schritte entgegen ihrer natürlichen Reihenfolge verwenden möchte. Wir erhalten für jeden Schritt $i \in M$, jeden vorherigen Schritt $j \in \{0, \ldots, i-1\}$, jeden Reisenden $r \in R$ und jedes aufeinanderfolgende Kantenpaar e, e' im Pfad p_r des Reisenden die Einschränkungen

$$\begin{aligned} H_{i,e} - f_{i,e} - f_{j,e'} &\geq -1 \text{ und} \\ h_{j,e'} - f_{i,e} - f_{j,e'} &\geq -1. \end{aligned}$$

Entspricht jeder Schritt des Meta-Fahrzeugs einem eigenen Fahrzeug, haben wir die Halte richtig gezählt. Innerhalb eines Fahrzeugs ist allerdings der Halt nach einer Kante und vor der darauffolgenden Kante gleichbedeutend. Entsprechend benötigen wir noch Variablen, die uns angeben, wann wir Halte doppelt gezählt haben. Dafür führen wir für jede Kante $e \in E$ und jeden Schritt $i \in M \setminus \{0\}$ die 0-1-Variable $\hat{h}_{i,e}$ ein. Die Variable $\hat{h}_{i,e}$ ist eins genau dann, wenn der Halt an der Kante e vor Schritt i bereits von dem Halt nach Schritt $i-1$ gezählt wird. Zur Formulierung der Bedingung benötigen wir noch für jeden Pfad (u, v, w) und jeden Schritt $i \in M \setminus \{0\}$ die 0-1-Variable $\hat{H}_{i,(u,v,w)}$, die angibt, dass das Meta-Fahrzeug nach Schritt $i-1$ an Kante (u, v) und vor Schritt i an Kante (v, w) hält. Dafür benötigen wir die Einschränkungen

$$\begin{aligned} \hat{H}_{i,(u,v,w)} - H_{i-1,(u,v)} - h_{i,(v,w)} &\geq -1, \\ H_{i-1,(u,v)} - \hat{H}_{i,(u,v,w)} &\geq 0 \text{ und} \\ h_{i,(v,w)} - \hat{H}_{i,(u,v,w)} &\geq 0. \end{aligned}$$

Dann müssen wir sicherstellen, dass $\hat{h}_{i,e} = 0$ gilt, wenn das Meta-Fahrzeug nicht nach Schritt $i-1$ und vor Schritt i hält. Es ergibt sich für jeden Pfad (u, v, w), der Teilgraph von G ist, und jeden Schritt $i \in M \setminus \{0\}$ die Einschränkung

$$\hat{H}_{i,(u,v,w)} - \hat{h}_{i,(v,w)} - f_{i-1,(u,v)} - f_{i,(v,w)} \geq -2.$$

Ebenso muss $\hat{h}_{i,e} = 0$ gelten, wenn das Meta-Fahrzeug zwischen Schritt $i-1$ und Schritt i einen Sprung gemacht hat. Wir erhalten für jedes Kantenpaar $e = (u, v), e' = (u', v') \in E$ mit $v \neq u'$ und jeden Schritt $i \in M \setminus \{0\}$ die Einschränkung

$$\hat{h}_{i,e'} + f_{i-1,e} + f_{i,e'} \leq 2.$$

Zuletzt muss auch $\hat{h}_{i,e} = 0$ gelten, wenn das Meta-Fahrzeug im Schritt $i-1$ keine Kante befährt, denn dies entspricht einem anderen Fahrzeug. Es gilt also für jede Kante $e \in E$ und jeden Schritt $i \in M \setminus \{0\}$ die Einschränkung

$$\sum_{e' \in E} f_{i-1,e'} - \hat{h}_{i,e} \geq 0.$$

Nachdem wir jetzt alle Variablen und Nebenbedinungen definiert haben, fehlt uns noch die Minimierungsfunktion. Wir erinnern uns an die zu minimierende Kostenfunktion aus Kapitel 3:

$$\hat{c} = T + \alpha \cdot h \text{ mit } T = \sum_{f \in F} \sum_{e \in f} c(e) \text{ und } h \text{ Anzahl Halte.}$$

Übertragen auf unsere Variablen in der teiltransformierten Instanz ergibt sich die Minimierungsfunktion

$$m = \sum_{e \in E} \sum_{i \in M} (c(e) \cdot f_{i,e}) + \sum_{e \in E} \sum_{i \in M} (\alpha H_{i,e} + \alpha h_{i,e} - \alpha \hat{h}_{i,e}).$$

Wir bemerken, dass unsere Konstruktion nur aus polynomiell vielen Variablen besteht, die auch nur polynomiell oft in Nebenbedingungen oder der Minimierungsfunktion vorkommen. Deshalb ist die Konstruktion polynomielle.

Satz 8.2: *Aus einer optimalen Lösung einer transformierten ILP-Instanz aus Konstruktion 8.1 lässt sich in polynomieller Zeit eine optimale Lösung der ursprünglichen Fahrzeugzuweisung-mit-Haltekosten-Instanz rekonstruieren.*

Beweis. Eine Lösung der transformierten ILP-Instanz besteht aus einer Variablenbelegung, die die gegebenen Nebenbedingungen einhält und dabei die Minimierungsfunktion minimiert. Entsprechend müssen wir aus der Variablenbelegung die Lösung der Fahrzeugzuweisung-mit-Haltekosten-Instanz rekonstruieren, eine Menge an Fahrzeugen sowie eine Zuweisung von E_R auf die Fahrzeuge. Dann versichern wir uns, dass wir auch eine gültige Lösung erhalten haben. Wir schließen mit der Polynomialität der Rekonstruktion.

Da nach Konstruktion 8.1 für jeden Schritt $i \in M$ nur höchstens eine Variable $f_{i,e}$ gleich eins ist, können wir für jeden Schritt die entsprechende Variable ermitteln. Ist $f_{i,e} = 1$, so befährt der i-te Schritt des Meta-Fahrzeugs die Kante e. Ist für ein $i \in M$ $f_{i,e} = 0$ für alle $e \in E$, so befährt das Meta-Fahrzeug zum i-ten Schritt keine Kante. Um die Fahrzeuge aus dem Meta-Fahrzeug zu konstruieren, gehen wir die Schritte von 0 bis E_R durch. Wann immer die von zwei aufeinanderfolgenden Schritten befahrenen Kanten keinen Pfad bilden, wechseln wir zum nächsten Fahrzeug. Zu jedem Zeitpunkt weisen wir allen Reisenden, die zu diesem Schritt an der entsprechenden Kante bedient werden, das aktuelle Fahrzeuge zu. Gleichzeitig bilden wir an jedem Halt aus den Kanten seit dem vorherigen Halt eine der Relationen des aktuellen Fahrzeugs. Konkreter: Ist (u, v, w) ein Pfad in der Fahrzeugzuweisung-mit-Haltekosten-Instanz, sodass (u, v) an Schritt $i - 1$ und (v, w) an Schritt i vom Meta-Fahrzeug befahren wird. Dann ist Halt dadaurch definiert, dass $H_{i-1,(u,v)} = 1$ oder $h_{i,(v,w)} = 1$ gilt.

Da wir bei jedem Sprung des Meta-Fahrzeugs ein neues Fahrzeug definieren, befährt jedes Fahrzeug einen Pfad. Der Pfad eines jeden Fahrzeugs ist erschöpfend in Teilpfade gegliedert. Da wir immer die Teilpfade zwischen zwei Halten der ILP-Lösung als eine Relation ausweisen, bildet die Abfolge aller Relationen gerade den Pfad des Fahrzeugs. Nach Konstruktion haben wir sichergestellt, dass jede Kante des Pfads eines jeden Reisenden von genau einem Schritt bedient wird. Deshalb ist die Zuweisung von E_R zu Fahrzeugen wohldefiniert. Ebenso haben wir sichergestellt, dass wenn zwei aufeinanderfolgende Schritte nicht von zwei aufeinanderfolgenden Schritten des Meta-Fahrzeugs bedient werden, dazwischen beide involvierten Schritte halten. Da zwei aufeinanderfolgende Schritte, die aufeinanderfolgende Kanten bedienen, gerade den aufeinanderfolgenden Kante im selben Fahrzeug entsprechen, fordern wir einen Halt, wenn ein Reisender das Fahrzeug wechselt und im selben Fahrzeug die Zeit wechselt. Entsprechend ist die erhaltene Lösung eine wohldefinierte, gültige Lösung der ursprünglichen Fahrzeugzuweisung-mit-Haltekosten-Instanz.

Da wir die zu minimierende Funktion der Fahrzeugzuweisung-mit-Haltekosten-Instanzen gleichbedeutend in die Sprache der transformierten ILP-Instanz übersetzt haben, ist die rekonstruierte Lösung einer optimalen Lösung der transformierten Instanz optimal. Weiter betrachten wir jede Variable nur konstant oft und haben jeweils nur maximal linearen Zusatzaufwand. Somit lässt sich in polynomieller Zeit aus einer optimalen Lösung der transformierten Instanz eine optimale Lösung der ursprünglichen Instanz rekonstruieren. ∎

9. Ausblick

Wie schon in Abschnitt 4.4 bemerkt, scheint es für die von uns untersuchten Instanzen eine Reihenfolge zu geben, in der wir die Reisenden betrachten können, um eine optimale Lösung zu ermitteln. Leider mussten wir aber auch einsehen, dass es Instanzen gibt, für die manche Reihenfolgen zu einer suboptimale Lösung führen. Hier stellen sich somit zwei Fragen, die tiefergehend untersucht werden können. Zum einen die Frage nach der Existenz einer optimalen Reihenfolge:

Frage 9.1: *Gibt es für jede Instanz des Problems FAHRZEUGZUWEISUNG MIT HALTEKOSTEN eine Reihenfolge, in der wir die Reisenden betrachten können, um mit dem Ansatz aus Abschnitt 4.4 eine optimale Lösung zu erhalten?*

Daran angeknüpft stellt sich die Frage nach der effizienten Suche einer solchen Reihenfolge.

Frage 9.2: *Kann eine Reihenfolge, in der mit dem Ansatz aus Abschnitt 4.4 eine optimale Lösung erhalten wird, für jede Instanz des Problems FAHRZEUGZUWEISUNG MIT HALTEKOSTEN effizient berechnet werden?*

Und gebe es ein solches Verfahren, ergibt sich daraus ein effizienter Lösungsalgorithmus für das Problem FAHRZEUGZUWEISUNG MIT HALTEKOSTEN.

In Abschnitt 5.2.1 haben wir viele Eigenschaften gezeigt, die eine optimale Lösung auf einer Einhals-Spinne erfüllen muss. Daraus haben wir das Problem GRUPPENZUSAMMENFAHRT abgeleitet. Wegen unseres Algorithmus für Einhals-Spinnen wissen wir, dass eine polynomielle Lösbarkeit von GRUPPENZUSAMMENFAHRT äquivalent ist zu einer polynomiellen Lösbarkeit von FAHRZEUGZUWEISUNG MIT HALTEKOSTEN. Deswegen ergibt sich die folgende Frage:

Frage 9.3: *Ist das Problem GRUPPENZUSAMMENFAHRT in polynomieller Zeit lösbar?*

Neben der von uns untersuchten, in Polynomialzeit lösbaren Problemvariante FAHRZEUGZUWEISUNG MIT HALTEKOSTEN UND PAARWEISER ZUSAMMENFAHRT sind noch viele weitere spannenden Problemvarianten denkbar. Eine Möglichkeit ist die stärkere Beachtung der Bedürfnisse der Reisenden. Im Problem FAHRZEUGZUWEISUNG MIT HALTEKOSTEN ist es irrelevant, wie lang ein Reisender an einem Umstieg warten muss. Unter Beachtung der Zeit ergibt sich zum Beispiel das folgende Problem:

Frage 9.4: *Betrachte eine Variante V_1 des Problems FAHRZEUGZUWEISUNG MIT HALTEKOSTEN. Diese Variante V_1 beachtet zusätzlich noch den Fahrtzeitpunkt der Reisenden. Als Nebenbedingung darf die Wartezeit aller Umstiege einen gewissen Wert nicht überschreiten. Ist V_1 effizient lösbar?*

Auch ignorieren wir die in echt sehr endliche Kapazität von Fahrzeugen. Daraus ergibt sich ebenso ein weiteres Problem:

Frage 9.5: *Betrachte eine Variante V_2 des Problems FAHRZEUGZUWEISUNG MIT HALTEKOSTEN. In der Variante V_2 gibt es zusätzlich einen Fahrzeugfuhrpark mit Fahrzeugen beschränkter Größe. Die Reisenden, die ein Fahrzeug verwenden, dürfen zu jedem Zeitpunkt die Kapazität dieses Fahrzeugs nicht überschreiten. Ist V_2 effizient lösbar?*

Weiter sind die Kosten eines jeden Halts in Fahrzeugzuweisung mit Haltekosten identisch. Wie aber ist der Einfluss von variablen Haltekosten? Daraus ergibt sich zum Beispiel das folgende Problem:

Frage 9.6: *Betrachte eine Variante V_3 des Problems Fahrzeugzuweisung mit Haltekosten. In der Variante V_3 gibt es nicht einen globalen Skalar für die Haltekosten. Stattdessen gibt es eine Funktion, die jedem Knoten seine Haltekosten zuweist. Ist V_3 effizient lösbar?*

Wir halten fest: Es gibt noch viele weitere spannende Varianten des Problems Fahrzeugzuweisung mit Haltekosten, die untersucht werden können.

Literatur

[Alo+17] Javier Alonso-Mora, Samitha Samaranayake, Alex Wallar, Emilio Frazzoli und Daniela Rus. „On-demand high-capacity ride-sharing via dynamic trip-vehicle assignment“. In: *Proceedings of the National Academy of Sciences* Jg. 114 (2017), S. 462–467. eprint: *https://www.pnas.org/doi/pdf/10.1073/pnas.1611675114*.

[Blä+25] Thomas Bläsius, Adrian Feilhauer, Markus Jung, Moritz Laupichler, Peter Sanders und Michael Zündorf. „Synergistic Traffic Assignment“. Englisch. In: *Proceedings of the International Joint Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS). Ed.: Y. Vorobeychik.* 24st International Joint Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems. AAMAS 2025 (Detroit, MI, USA, 19.–23. Mai 2025). International Foundation for Autonomous Agents and Multiagent Systems (IFAAMAS), 2025, S. 352–360. ISBN: 979-84-00-71426-9.

[BSW] Valentin Buchhold, Peter Sanders und Dorothea Wagner. „Fast, Exact and Scalable Dynamic Ridesharing“. In: *2021 Proceedings of the Symposium on Algorithm Engineering and Experiments (ALENEX)*, S. 98–112. eprint: *https://epubs.siam.org/doi/pdf/10.1137/1.9781611976472.8*.

[CL25] François Clautiaux und Ivana Ljubić. „Last fifty years of integer linear programming: A focus on recent practical advances“. In: *European Journal of Operational Research* Jg. 324 (2025), S. 707–731. ISSN: 0377-2217. DOI: *https://doi.org/10.1016/j.ejor.2024.11.018*.

[CW16] Weert Canzler und Dirk Wittowsky. „The impact of Germany’s Energiewende on the transport sector – Unsolved problems and conflicts“. Englisch. In: *Utilities Policy* Jg. 41 (2016), S. 246–251. ISSN: 0957-1787. DOI: *https://doi.org/10.1016/j.jup.2016.02.011*.

[Kor08] Bernhard Korte. *Kombinatorische Optimierung :* Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2008. ISBN: 978-3-540-76919-4.

[MZW13] Shuo Ma, Yu Zheng und Ouri Wolfson. „T-share: A large-scale dynamic taxi ridesharing service“. In: *2013 IEEE 29th International Conference on Data Engineering (ICDE)*. 2013, S. 410–421. DOI: *10.1109/ICDE.2013.6544843*.

[San+14] Paolo Santi, Giovanni Resta, Michael Szell, Stanislav Sobolevsky, Steven H. Strogatz und Carlo Ratti. „Quantifying the benefits of vehicle pooling with shareability networks“. In: *Proceedings of the National Academy of Sciences* Jg. 111 (2014), S. 13290–13294. eprint: *https://www.pnas.org/doi/pdf/10.1073/pnas.1403657111*.

[Wil09] Hilary P. Williams. *Logic and Integer Programming /*. Englisch. Boston, MA : Springer-Verlag US, 2009. ISBN: 978-0-387-92280-5.

[ZSL17] Peitong Zhang, Zhanbo Sun und Xiaobo Liu. „Optimized Skip-Stop Metro Line Operation Using Smart Card Data“. In: *Journal of Advanced Transportation* Jg. 2017 (2017), S. 3097681. eprint: *https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1155/2017/3097681*.

A. Anhang

A.1. Konstante Zusatzhalte

In diesem Abschnitt betrachten wir die Problemvariante FAHRZEUGZUWEISUNG MIT HALTEKOSTEN UND k ZUSATZHALTEN. Die Problemvariante FAHRZEUGZUWEISUNG MIT HALTEKOSTEN UND k ZUSATZHALTEN ist das Problem FAHRZEUGZUWEISUNG MIT HALTEKOSTEN mit der zusätzlichen Einschränkung, dass es in einer Lösung höchstens k zusätzliche Halte gibt. Die Anzahl zusätzlicher Halte ist die Anzahl an Halte abzüglich der Anzahl an Halte in einer Basis-Lösung. Die Basis-Lösung L_{base} ist gegeben durch ein eigenes Fahrzeug für jeden Reisenden.

Der Brute-Force-Algorithmus A.1 löst die Problemvariante FAHRZEUGZUWEISUNG MIT HALTEKOSTEN UND k ZUSATZHALTEN. Der Algorithmus A.1 trifft sukzessive Entscheidungen, ob zwei Reisende zusammenfahren. Als initialer Zustand dient die Zuweisung eines eigenen Fahrzeugs zu jedem Reisenden. In diesem initialien Zustand wird noch keine Strecke geteilt. Somit entspricht dieser Zustand noch keiner getroffener Entscheidung. Entscheidet der Algorithmus zwei Reisende r und r' auf einem Pfad p zusammenfahren zu lassen, so fährt r' auf p in den Fahrzeugen, in denen auch r fährt. Diese Entscheidung wird transitiv gefällt. Das heißt, wenn ein Reisender $\tilde{r}$ auf einem Teilpfad $\tilde{p}$ von p mit r' zusammenfährt, fährt $\tilde{r}$ auf $\tilde{p}$ auch mit r zusammen. Dafür übernehmen die Fahrzeuge von r auf p auch die Halte von Fahrzeugen von r'. Die Fahrzeuge von r' fahren auf p nicht mehr und werden auf Strecken außerhalb von p verkürzt. Fährt r' am Beginn und Ende von p im selben Fahrzeug, so teilt sich dieses in zwei Fahrzeuge auf. Eines für den Bereich vor und eines für den Bereich nach p. Der Algorithmus wiederholt die Entscheidungsfindung, bis keine zusätzlichen Halte mehr verfügbar sind. Von allen Entscheidungen, die er in jedem Schritt betrachtet, wählt er die beste aus. In dem Ausdruck min findet sich die Berechnung des Werts der beiden Lösungen und die Auswahl der Lösung mit dem geringeren Wert wider.

Lemma A.1: *Der Algorithmus A.1 löst die Problemvariante Fahrzeugzuweisung mit Haltekosten und konstanten Zusatzhalten.*

Beweis. Der Algorithmus betrachtet jede mögliche Menge an Zusammenfahrten. Denn er beginnt mit keiner getroffenen Entscheidung und trifft dann jede beliebige Wahl. Dabei ist die Erweiterung einer Algorithmus-Entscheidung r und r' zusammenfahren zu lassen auf einen weiteren Reisenden $\tilde{r}$, der auf einem Teilpfad bereits mit r' zusammenfährt, notwendig. Denn nur so kann die vorherige Entscheidung, dass $\tilde{r}$ und r' zusammenfahren, honoriert werden. Weiter ist es ausreichend nur Pfade zu betrachten, die auch neue Pfade zusammenfahren zu lassen. Denn eine Zusammenfahrt eines Teilpfads zusätzlicher zu einer Zusammenfahrt eines größeren Pfads, fügt höchstens neue Halte hinzu. Werden diese für eine andere Zusammenfahrt benötigt, können diese auch mit dieser hinzugefügt werden. Somit berechnet der Algorithmus eine optimale Lösung der Problemvariante Fahrzeugzuweisung mit Haltekosten und konstanten Zusatzhalten. ∎

Algorithmus A.1 : Ein Brute-Force-Algorithmus für die Problemvariante Fahrzeugzuweisung mit Haltekosten und k Zusatzhalten. Der rekursive Algorithmus probiert jede mögliche Zusammenfahrt mit maximal k zusätzlichen Halten und gibt die beste dieser Lösungen zurück. Als Basisfall im ersten Aufruf verwenden wir die Basislösung gegeben durch ein eigenes Fahrzeug für jeden Reisenden.

Funktion BFBH:
  Eingabe : Vorläufige Lösung w bestehend aus Fahrzeugen und Reisende-Fahrzeug-Zuordnung
  Ausgabe : Optimale Lösung unter Beibehaltung der Zusammenfahrten und Halte in w
  $m \longleftarrow w$
  für alle Reisenden r **tue**
    für alle Reisenden r' **tue**
      für alle von r und r' gemeinsam befahrenen Pfad p **mit** p kein Teilpfad einer Zusammenfahrt von r und r' in w **tue**
        wenn Eine Zusammenfahrt z von r und r' beinhaltet Teilpfad von p **dann**
          $n \longleftarrow w$ mit Zusammenfahrt z von r und r' erweitert auf p
        sonst
          $n \longleftarrow w$ mit zusätzlicher Zusammenfahrt von r und r' auf p
        wenn Anzahl zusätzlicher Halte in n weniger als k **dann**
          $\tilde{n} \longleftarrow$ BFBH(n)
          $m \longleftarrow \min(m, \tilde{n})$
        wenn sonst Anzahl zusätzlicher Halte in n genau k **dann**
          $m \longleftarrow \min(m, n)$
  return m

Ginge jede Zusammenfahrt mit einem zusätzlichen Halt einher, hätte der Algorithmus A.1 eine polynomielle Laufzeit. Denn in jeder Rekursionsstufe kommt eine weitere Zusammenfahrt hinzu. Es wäre also die Rekursionstiefe konstant beschränkt. Weiter wird in jeder Rekursionsstufe nur polynomielle Arbeit verrichtet, sodass die Polynomialität des Algorithmus folgen würde.

Allerdings entstehen die Zusammenfahrten nicht immer nur zwischen zwei Reisenden. Wie beispielhaft in der Situation in Abbildung A.1 dargestellt können geteilte Strecke verschiedener Reisender übereinstimmen. So teilen sich in diesem Beispiel alle vier Reisende eine Kante (e, f). Fahren in der bisherigen Lösung bereits r_0 und r_1 sowie r_2 und r_3 die Kante (e, f) zusammen, benötigt dies bereits acht zusätzliche Halte. Für jeden Reisenden gibt es einen Halt am Beginn und einen am Ende der Zusammenfahrt. Da es sich aber immer um dieselbe Kante handelt, benötigt es genausoviele Halte, wenn alle vier Reisenden die Kante (e, f) gemeinsam zurücklegen. Betrachtet der Algorithmus nun eine mögliche Zusammenfahrt von r_1 und r_2 auf der Kante (e, f), so fahren durch die Transitivität alle vier Reisenden zusammen. Es werden also trotz einer zusätzlichen Zusammenfahrt keine zusätzlichen Halte benötigt. Somit können wir keine konstante Beschränkung für die Rekursionstiefe mehr angeben und deshalb auch keine Polynomialität folgern.

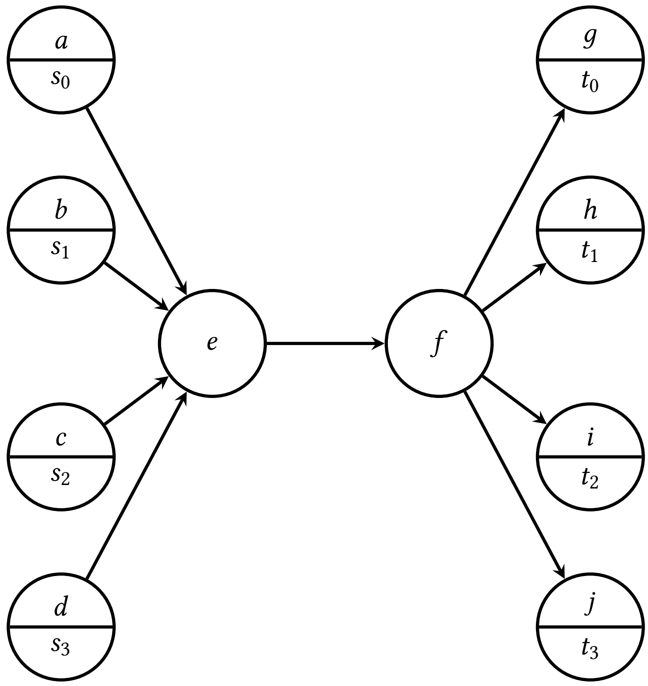

Abbildung A.1.: Vier Reisende teilen sich die Kante (e, f). Fahren je zwei der Reisenden bereits zusammen – beispielsweise r_0 mit r_1 und r_2 mit r_3 – benötigt es keine Zusatzhalt, damit auch r_1 und r_2 zusammenfahren.