



Inverse Traffic Assignment

Bachelorarbeit von

Markus Jung

an der Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik (ITI)

Erstgutachter: T.-T.-Prof. Dr. Thomas Bläsius
Zweitgutachter: Prof. Dr. Peter Sanders
Betreuende Mitarbeiter: Michael Zündorf
Adrian Feilhauer
Moritz Laupichler

16.06.2023 – 16.10.2023

Karlsruher Institut für Technologie
Fakultät für Informatik
Postfach 6980
76128 Karlsruhe

Ich versichere wahrheitsgemäß, die Arbeit selbstständig angefertigt, alle benutzten Hilfsmittel vollständig und genau angegeben und alles kenntlich gemacht zu haben, was aus Arbeiten anderer unverändert oder mit Änderungen entnommen wurde. Ich versichere ebenfalls die *Satzung zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis am Karlsruher Institut für Technologie* gelesen und befolgt zu haben.

Karlsruhe, 16.10.2023

.....*M. Jung*.....
(Markus Jung)

Zusammenfassung

Traffic Assignment beschäftigt sich mit der Vorhersage des Verhaltens von Verkehrsteilnehmern, um die Auslastung eines Straßennetzwerks zu ermitteln. Inverse Traffic Assignment strebt eine neue Art der Zuordnung von Verkehrsteilnehmern zu gemeinsam befahrenen Routen in einem urbanen Straßennetzwerk an, welche die wirksame Bekämpfung der durch steigende Verkehrsnachfrage ausgelösten Probleme ermöglichen soll. Im urbanen Raum entstehen beim Transport von Verkehrsteilnehmern in Einzelfahrzeugen hohe Schadstoffemissionen und hoher Energieverbrauch. Für Inverse Traffic Assignment wird die Routenwahl der Verkehrsteilnehmer unter der Annahme vorhergesagt, dass ein hohes Verkehrsaufkommen zusätzliche Anreize schafft, die entsprechende Route zu befahren. In dieser Arbeit wird ein iteratives Verfahren vorgestellt, das gemäß dieser Anreize die aus der Routenwahl der Verkehrsteilnehmer resultierende Netzwerkauslastung bestimmt. Dabei soll sich der Verkehr auf wenige stark befahrene Straßen im Netzwerk konzentrieren. Motiviert wird das Vorgehen durch die Annahme, dass auf Routen mit hohem resultierenden Verkehrsaufkommen ein Ausbau der Möglichkeiten für die Reise in öffentlichen und geteilten Verkehrsmitteln besonders wirksam Emissionen und Energieverbrauch pro Verkehrsteilnehmer reduzieren kann, während weite Teile des Straßennetzwerks entlastet werden. Bei Tests des iterativen Verfahrens auf einem urbanen Straßennetzwerk für verschiedene Eingaben stellt sich ein stabiler Zustand des Verkehrsaufkommens nach wenigen Iterationen ein und es kann das gewünschte Resultat eines auf eine kleine Anzahl an Routen konzentrierten Verkehrsaufkommens beobachtet werden.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation	2
1.2	Gliederung	3
2	Theoretische Grundlagen	5
2.1	Das Problem Traffic Assignment	5
2.2	Wardrops Prinzipien	6
2.2.1	Nash-Gleichgewicht und Nutzer-Equilibrium	7
2.3	Beckmanns Transformation	7
2.4	Bestehende Lösungsansätze	8
2.4.1	Berechnung eines Nutzer-Equilibriums	8
2.4.2	Ein Heuristisches Verfahren	10
2.5	Anwendung auf Inverse Traffic Assignment	11
3	Vorbemerkungen	13
3.1	Notation und Problemdefinition	13
3.2	Berechnung von kürzesten Wegen	15
4	Das ITA-Verfahren	17
4.1	Das Nutzer-Equilibrium und System-Optimum	17
4.1.1	Nicht-Eindeutigkeit des Nutzer-Equilibriums	18
4.2	Das Lösungsverfahren	20
4.3	Bestimmung von Kostenfunktionen	23
4.3.1	Exponentengewichtete Kostenreduzierung	25
4.3.2	Logarithmische Kostenreduzierung	26
4.3.3	Kapazitätsbeschränkte Kostenreduzierung	27
4.3.4	Diskussion der Kostenfunktionen	27
4.4	Das Braess Paradoxon	28
5	Konvergenz des ITA-Verfahrens	33
5.1	Ganzzahligkeit der Nutzer-Equilibria	33
5.2	Oszillationen im ITA-Verfahren	34
5.2.1	Wechsel der kürzesten O-D-Pfade	35
5.2.2	Direkte Oszillationen	37
5.2.3	Verallgemeinerung der Kostenfunktionen	42
5.2.4	Verallgemeinerung der Oszillationsgröße	43
5.3	Weitere Beweisansätze	45
6	Experimente	49
6.1	Eingaben	49
6.2	Das Ergebnis der Verkehrszuordnung	50

6.3	Entwicklung verschiedener Variablen	52
6.3.1	Absolute Werte	59
6.4	Verschiedene Anzahlen von O-D-Paaren	61
6.5	Stark belastete und stark entlastete Straßen	62
7	Schlussbemerkungen	65
7.1	Zukünftige Arbeiten	65
Literatur		67

1 Einleitung

Eine Zunahme des Straßenverkehrs hat eine Reihe von negativen Auswirkungen auf die Umwelt und das soziale Leben [DW11]. Eine hohe Anzahl an individuellen Transportwegen bewirkt unter anderem Stau und Umweltverschmutzung [Pat15]. Daher bedarf es der Planung von Anpassungen des Transportnetzwerks, um diese Probleme zu bekämpfen. Um dabei gefundene Lösungen zu evaluieren, muss die Auslastung des geplanten Straßennetzwerks simuliert werden [She85].

Traffic Assignment beschreibt das Problem der Vorhersage des Verhaltens der Verkehrsteilnehmer bei der Routenwahl in einem gegebenen Netzwerk [PERW15]. Die Routenwahl bestimmt die Auslastung jeder Straße, die wiederum genutzt werden kann, um die Auswirkungen des geplanten Verkehrsnetzwerks zu messen. So können anhand des vorhergesagten Verkehrsaufkommens für ein gegebenes Netzwerk die Reisezeit der Verkehrsteilnehmer und auch Effekte wie die resultierende Luftverschmutzung gemessen werden [She85].

Das Prinzip, nach dem Verkehrsteilnehmer eine Route unter verschiedenen möglichen Alternativen wählen, ist entscheidend für die Zuteilung des Verkehrs auf das Straßennetzwerk [Pat94 | She85]. Die übliche Annahme bei Traffic Assignment ist, dass ein Verkehrsteilnehmer stets die Route mit der geringsten Reisezeit zwischen dem Start- und Zielpunkt seiner Reise wählt. Die Reisezeit erhöht sich durch erhöhtes Verkehrsaufkommen und daraus resultierenden Stau auf der entsprechenden Route, wodurch die individuellen Entscheidungen der Verkehrsteilnehmer voneinander abhängen. Erhöhtes Verkehrsaufkommen auf einer Route schafft den Anreiz, einen alternativen Reiseweg zu wählen. Diese geänderte Routenwahl kann wiederum Stau auf anderen Reisewegen erzeugen [BSW19].

Die Routenwahl und Stau im Netzwerk üben nach obigen Annahmen direkten Einfluss aufeinander aus. Ein *Equilibrium* zwischen Stau und Routenwahlen bezeichnet eine Zuordnung von Verkehrsteilnehmern zu befahrenen Routen, für die kein Verkehrsteilnehmer einen Anreiz hat, seine Route zu ändern [She85]. Ein solches Equilibrium für ein Straßennetzwerk und darin reisende Verkehrsteilnehmer entspricht dem Ersten der zwei von J. G. Wardrop spezifizierten *Wardrop-Prinzipien*.

Das erste Wardrop-Prinzip ([War52], Seite 345): *Die Reisezeit auf allen tatsächlich befahrenen Routen ist gleich, und kleiner als die Reisezeit für ein einzelnes Fahrzeug auf einer nicht befahrenen Route.*

Gleiche minimale Reisezeit befahrener Routen gilt dabei jeweils für die Routen, die ein gleiches Paar von Start- und Zielknoten verbinden, zwischen denen Verkehrsteilnehmer reisen. Ein solches Paar aus Start- und Zielpunkt einer Reise wird als *O-D-Paar (Origin-Destination-Paar)* bezeichnet [She85]. Die durch das erste Wardrop-Prinzip beschriebene Situation kann aufgefasst werden als ein stabiler Zustand, der durch fortlaufende Änderung der Routenwahl der Verkehrsteilnehmer erreicht wird [CS11]. Ein Equilibrium ist laut Wardrop dann erreicht, wenn kein Verkehrsteilnehmer durch Nutzung einer alternativen Route seine Reisezeit ver-

ringern kann. Der Zustand wird bezeichnet als *Nutzer-Equilibrium* (engl. *user equilibrium (UE)*) [She85].

Inverse Traffic Assignment weicht von der Annahme, dass Verkehrsteilnehmer bei der Routenwahl ihre individuelle Reisezeit minimieren, ab. Die dabei vorgenommenen Änderungen des Prinzips der Routenwahl werden im folgenden Abschnitt beschrieben.

1.1 Motivation

Im urbanen Raum nimmt die durchschnittliche Fahrzeugbelegung (engl. *average vehicle occupancy*) besonders niedrige Werte an. In Paris reisen eine durchschnittliche Anzahl von 1.28 Personen in einem Fahrzeug [YLCV18]. Schon die Erhöhung der Anzahl an Verkehrsteilnehmern in wenigen Fahrzeugen kann eine große Menge an Treibstoff sparen [JK09]. *Ride-sharing* könnte auf diese Weise ebenfalls zu starker Verminderung des CO_2 -Ausstoßes führen [Her+19 | YLCV18]. Weiter können Anreize für eine erhöhte Nutzung öffentlicher Verkehrsmittel zu einer starken Reduktion der Emissionen und des Energieverbrauchs führen [CHM10].

Inverse Traffic Assignment verfolgt das Ziel, bei der Berechnung des Verkehrsflusses solche Anreize für eine erhöhte Belegung pro Fahrzeug zu simulieren.

Die bestehende Annahme für *Traffic Assignment*, dass die Umstände der Reise über eine Route anhand der Reisezeit gemessen werden, schafft den Anreiz, von einer stark befahrenen Straße abzuweichen. Hier liegt die zentrale Neuerung von *Inverse Traffic Assignment*. Von vielen Verkehrsteilnehmern gemeinsam befahrene Straßen werden angestrebt. Dafür werden bei der Vorhersage der Routenwahl der Verkehrsteilnehmer Anreize gesetzt, von schwächer befahrenen Routen auf stärker befahrene Routen abzuweichen.

Das erwartete Ergebnis für die Simulation von solchem Verhalten der Verkehrsteilnehmer ist die starke Auslastung von wenigen Kanten, gegensätzlich zu einer ausgeglichenen Nutzung vieler Kanten bei Vermeidung von Stau. Das Ziel dieses Ansatzes ist jedoch keineswegs die Steigerung von Stau auf zentralen Routen im Netzwerk. Es sollen gerade die Straßen und Routen gefunden werden, die stark befahren werden, wenn ein Anreiz zu gemeinsamer Mehrnutzung einer Straße besteht.

Die Idee ist, dass auf solchen Routen der Ausbau der Möglichkeiten für öffentliche Verkehrsmittel und *Ride-sharing* besonders lohnenswert sein könnte. Die erhöhte Verfügbarkeit dieser geteilten Transportmittel könnte einen ähnlichen Anreiz zur erhöhten Nutzung der Routen bedeuten. Reist die erhöhte Anzahl an Verkehrsteilnehmern nicht in einzelnen Fahrzeugen, sondern in geteilten und öffentlichen Verkehrsmitteln, könnte dies wie oben erwähnt zur Reduktion der Emissionen und des Energieverbrauchs führen.

Um den Anreiz zur erhöhten Nutzung einzelner Straßen zu erzeugen, wird beeinflusst, wie die Umstände der Reise über eine Route gemessen werden. Um die Reise über eine Straße zu bewerten, können *Performance-Funktionen* eingesetzt werden, die als Eingabe das Verkehrsaufkommen auf der Straße erhalten [She85]. In dieser Arbeit werden *Performance-Funktionen* auch *Kostenfunktionen* genannt, die die Reisekosten einer Straße messen.

Wenn, wie für *Traffic Assignment* üblich, die Reisezeit zur Bestimmung der Reisekosten verwendet wird, steigen die Reisekosten mit steigendem Verkehrsaufkommen. Von dieser Eigenschaft der Reisekosten weicht *Inverse Traffic Assignment* ab. Bei der Routenwahl sollen den stark befahrenen Routen nicht höhere, sondern *niedrigere* Reisekosten zugeordnet werden.

Die zentrale Idee von Inverse Traffic Assignment ist also, die Reisekosten als *sinkend* im Verkehrsaufkommen auf der entsprechenden Straße zu definieren. Die kürzesten Routen (also Routen mit geringsten Reisekosten) zwischen den O-D-Paaren werden zunehmend solche, die sich mit den kürzesten Routen anderer O-D-Paare überschneiden. Wird eine Route stark befahren, schafft dies nicht den Anreiz, auf eine alternative Route auszuweichen, sondern von alternativen Routen auf die stark befahrene Route zu wechseln.

Die Reisekosten einer Straße entsprechen also für Inverse Traffic Assignment nicht mehr primär der Reisezeit. Sie repräsentieren auch die möglichen Änderungen in den durchschnittlichen Schadstoffemissionen und im Energieverbrauch pro Verkehrsteilnehmer auf der Straße. Diese Änderungen können realisiert werden, wenn die Verkehrsteilnehmer nicht in einzelnen Fahrzeugen, sondern in geteilten oder öffentlichen Verkehrsmitteln transportiert werden.

Diese Arbeit befasst sich also mit einer neuartigen Vorhersage der Routenwahlen in einem urbanen Transportnetzwerk. Es wird analog zu statischem, deterministischem Traffic Assignment vorgegangen. Dabei liegt jedem Verkehrsteilnehmer stets vollständige und korrekte Information über das Netzwerk und die Reisekosten der Kanten vor und die Verkehrsnachfrage ist zwischen jedem Start- und Zielknoten als fest gegeben und nicht variabel angenommen [SP81 | PERW15].

1.2 Gliederung

In Kapitel 2 werden das Problem Traffic Assignment und die dafür bestehenden Lösungsansätze und Algorithmen beschrieben. Weiter wird darauf eingegangen, welche Bestandteile der Lösungsalgorithmen auch auf die Vorhersage der Routenwahl bei Inverse Traffic Assignment angewendet werden können. Kapitel 3 führt in dieser Arbeit getroffene Annahmen, benötigte Notation, die für die Berechnung der kürzesten Wege eingesetzte Technik und Inverse Traffic Assignment als Problem ein. In Kapitel 4 wird das bei Inverse Traffic Assignment verwendete Verfahren zur Zuordnung von Verkehrsteilnehmern zu Routen beschrieben. Es werden die Eigenschaften der Lösungen untersucht und verschiedene Funktionen vorgestellt, die Verkehrsaufkommen auf darin steigende Reisekosten der Straßen abbilden. Weiter wird die Möglichkeit einer Erhöhung der Reisekosten auf allen befahrenen Routen durch eine Erweiterung des Transportnetzwerks nachgewiesen. Kapitel 5 analysiert das Konvergenzverhalten des Verfahrens zur Routenberechnung bei Inverse Traffic Assignment. Das Ziel ist der Beweis, dass das Verfahren für beliebige Eingaben ein Nutzer-Equilibrium berechnet. In Kapitel 6 wird die Ausführung des Verfahrens auf verschiedenen Eingaben und für verschiedene Kostenfunktionen beschrieben und die dabei gefundenen Lösungen untersucht.

2 Theoretische Grundlagen

Dieses Kapitel bietet einen Überblick über die theoretischen Grundlagen für die Lösung von Traffic Assignment. Dabei werden bestehende Lösungsansätze und Algorithmen beleuchtet und Vergleiche zu Inverse Traffic Assignment gezogen.

Abschnitt 2.1 führt Traffic Assignment als Problem ein. In Abschnitt 2.2 werden die für die Lösung benötigten grundlegenden Annahmen über das Verhalten der Verkehrsteilnehmer untersucht. Eine mathematische Formulierung für das Problem unter diesen Annahmen wird in Abschnitt 2.3 eingeführt. Abschnitt 2.4 behandelt existierende Ansätze und Lösungsalgorithmen. Abschließend wird in Abschnitt 2.5 beschrieben, welche der behandelten Aspekte auch für die Lösung von Inverse Traffic Assignment wichtig und nützlich sind.

2.1 Das Problem Traffic Assignment

Dieser Abschnitt definiert das Problem Traffic Assignment und führt die benötigte Notation ein. Für das Problem ist eine Repräsentation des Straßennetzwerks und der O-D-Paare nötig. Das zu analysierende Straßennetzwerk sei stets gegeben durch einen gerichteten, gewichteten Graphen $G = (V, E)$. Die Menge der O-D-Paare sei gegeben durch $S = \{(o_1, d_1), (o_2, d_2), \dots, (o_k, d_k)\} \subseteq V \times V$. Die Benennung folgt der Auffassung der O-D-Paare als Spieler in einem nicht-kooperativen Spiel. In Abschnitt 2.2.1 wird genauer auf spieltheoretische Begriffe eingegangen.

Für jedes O-D-Paar $s = (o, d) \in S$ gilt für den Ursprungsknoten o (engl. *origin*) und den Zielknoten d (engl. *destination*) also $o \in V$ und $d \in V$. Der Verkehrsbedarf zwischen Ursprung $o \in V$ und Ziel $d \in V$ sei für das O-D-Paar $s = (o, d) \in S$ durch $|s|$ gegeben. Der Wert $|s|$ entspricht also der festen Anzahl an Verkehrsteilnehmern, die von Knoten o nach Knoten d reisen. Für die Zuordnung des Verkehrs unter Beachtung von möglichem Stau (steigende Kantenkosten in bisherigen Ansätzen) oder durch Anreize zur gemeinsamen Straßennutzung (fallende Kosten bei Inverse Traffic Assignment) spielen die Reisekosten jeder Kante eine entscheidende Rolle. Die in dieser Arbeit behandelten Kantenkosten hängen primär vom Verkehrsaufkommen auf der zugehörigen Straße ab. Dafür sei allgemein ein *Verkehrsfluss* definiert als ein Vektor $f = (f_{e_1}, f_{e_2}, \dots, f_{e_{|E|}}) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{|E|}$, der jeder Kante $e \in E$ den Kantenfluss f_e zuordnet, der das Verkehrsaufkommen auf der entsprechenden Straße repräsentiert. Für jede Kante $e \in E$ sind nun die Reisekosten gegeben durch eine Gewichtsfunktion $c_e : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, die für Kantenfluss f_e die Kosten $c_e(f_e)$ berechnet.

Die Gewichtsfunktion des Graphen G ist damit für einen festen Verkehrsfluss f^i gegeben durch $c_i : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $e \mapsto c_e(f_e^i)$. Die Indizierung durch i ist motiviert durch spätere Abschnitte und Kapitel, in denen sich der Verkehrsfluss und entsprechend die Gewichtsfunktion über ein iteratives Verfahren hinweg ändern.

Traffic Assignment lässt sich nun wie folgt spezifizieren [She85 | Pat15 | DS69]:
Gegeben:

- Straßennetzwerk $G = (V, E)$

- Gewichtsfunktionen $c_e : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ für jede Kante $e \in E$
- O-D-Paare S und für jedes O-D-Paar $s = (o, d) \in S$ der Verkehrsbedarf $|s|$ zwischen Ursprung o und Ziel d

Gesucht:

Der Verkehrsfluss f , also der Flusswert für jede Kante $e \in E$.

Der für das gegebene Netzwerk und die O-D-Paare resultierende Verkehrsfluss hängt von dem Verhalten der Verkehrsteilnehmer ab. Nach welchen Kriterien diese die Route zwischen ihrem Start- und Zielknoten wählen, bestimmt den Flusswert auf den Kanten der verfügbaren Routen [FH95]. Zwei grundlegende Prinzipien für das Verhalten der Verkehrsteilnehmer werden im folgenden Abschnitt beleuchtet.

2.2 Wardrops Prinzipien

Wählt jeder Verkehrsteilnehmer stets die Route mit der geringsten Reisezeit, so führt dies laut Sheffi zu einem Verkehrsfluss, der dem Nutzer-Equilibrium nach Wardrops erstem Prinzip entspricht [She85]. Für jedes O-D-Paar haben in einem solchen Verkehrsfluss alle tatsächlich befahrenen Routen die gleiche Reisezeit, die geringer ist als alle nicht befahrenen Routen, die die entsprechenden Start- und Zielknoten verbinden.

Allgemein stimmen Verkehrsflüsse im Nutzer-Equilibrium nicht mit denen überein, die dem Zweiten von Wardrops Prinzipien entsprechen.

Das zweite Wardrop-Prinzip ([War52], Seite 345): *Die durchschnittliche Reisezeit ist minimal.*

Ein Verkehrsfluss, der nach diesem Prinzip die durchschnittliche Reisezeit der Verkehrsteilnehmer minimiert, wird auch als *System-Optimum* bezeichnet [She85 | CS11]. Ein solcher Verkehrsfluss minimiert insbesondere also die Gesamtkosten aller gefahrenen Routen. Die minimalen Gesamtkosten können genutzt werden, um eine geplante Maßnahme zur Verkehrsverwaltung und die damit verbundenen Gesamtreisekosten zu bewerten [She85].

Kostenunterschiede zwischen Nutzer-Equilibria und System-Optima werden in verschiedenen Arbeiten untersucht [CS11 | RT02 | Rou02 | CSS04 | CSS08]. Die Differenz zwischen den Gesamtkosten im Nutzer-Equilibrium und denen im System-Optimum kann für allgemeine Kostenfunktionen beliebig groß werden [CS11].

Die Wahl des individuell günstigsten Pfades für einen Verkehrsteilnehmer minimiert also im Allgemeinen nicht die Gesamtkosten aller Verkehrsteilnehmer [Rou02]. Roughgarden und Tardos zeigen in ihrer Arbeit jedoch, dass für eine gewisse Klasse an Kostenfunktionen das Verhältnis zwischen den Kosten von Nutzer-Equilibrium und System-Optimum nie größer als $\frac{4}{3}$ ist. Die Klasse umfasst Kostenfunktionen c_e , die linear im Kantensfluss f_e auf Kante e sind, also $c_e(f_e) = \alpha_e * f_e + \beta_e$ für $\alpha_e, \beta_e \geq 0$ [RT02].

2.2.1 Nash-Gleichgewicht und Nutzer-Equilibrium

Das schlechtest mögliche Verhältnis zwischen den Gesamtkosten eines Nutzer-Equilibriums und denen im System-Optimum wird als *price of anarchy* bezeichnet [Rou02]. Der Begriff geht zurück auf ein spieltheoretisches Konzept. Koutsoupias und Papadimitriou definieren den *price of anarchy* allgemein als das Verhältnis zwischen einem ungünstigsten *Nash-Gleichgewicht* und einem sozialen Optimum [KP09].

Ein Nash-Gleichgewicht beschreibt eine Strategienkombination der Spieler in einem nicht-kooperativen Spiel [Nas50 | Nas51]. Ein Spiel kann als eine Abfolge von Spielzügen, die verschiedene Spieler aus einer Reihe von möglichen Zügen wählen, verstanden werden [Owe13]. Für die Definition eines Spiels werden die Spieler, deren Strategien und deren Auszahlungsfunktionen benötigt. Die Auszahlungsfunktion eines Spielers ordnet jedem Spielausgang eine Auszahlung zu. Jeder Spieler strebt die Maximierung seiner Auszahlung an [FT91]. Die Strategie eines Spielers kann intuitiv als Plan verstanden werden, wie der Spieler in verschiedenen Situationen des Spiels handelt [Owe13]. Ein nicht-kooperatives Spiel ist dadurch gegeben, dass die Spieler nicht kollaborieren und unabhängig voneinander agieren [Nas51]. In einem Nash-Gleichgewicht maximiert die Strategie jedes Spielers seine Auszahlung, gegeben die festen Strategien der Mitspieler [Nas50 | Nas51].

Charnes und Cooper vergleichen den Prozess der Findung eines Nutzer-Equilibriums mit dem eines Nash-Gleichgewichts in einem nicht-kooperativen Spiel [CC58]. Dabei können die Spieler definiert werden als die Ursprungsknoten, jeweils mit dem Ziel, die Reisezeit entlang möglicher Routen zu verschiedenen Zielknoten zu minimieren.

Rosenthal beschreibt die Spieler als die einzelnen Verkehrsteilnehmer und weist jedem Spieler als mögliche Strategien die verfügbaren Pfade zwischen dem entsprechenden Start- und Zielknoten zu [Ros73]. Die Auszahlung für einen Spieler sind die Reisekosten, die für den Spieler auf den Kanten entlang des gewählten Pfades entstehen. Hier ist zu beachten, dass es mit dieser Formulierung gilt, die Auszahlung zu minimieren, statt sie wie üblich zu maximieren. Rosenthal zeigt, dass ein Nutzer-Equilibrium für eine ganzzahlige Formulierung von Traffic Assignment auch ein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien (wobei also kein Spieler seine Reise auf mehr als einen Pfad aufteilen kann) für dieses Spiel ist.

2.3 Beckmanns Transformation

Wardrops erstes Prinzip gibt eine Beschreibung für die im Nutzer-Equilibrium geltenden Bedingungen an. Die erste mathematische Formulierung dieses Problems präsentieren Beckmann et al. [BMW56]. Bezeichnet wird die Formulierung auch als *Beckmanns Transformation* [She85]. Ein Nutzer-Equilibrium wird hierbei durch die Maximierung einer konkaven beziehungsweise die Minimierung einer konvexen Zielfunktion unter linearen Nebenbedingungen gefunden.

Um das Optimierungsproblem zu definieren, ist die Einführung weiterer Notation notwendig. Für ein O-D-Paar $s = (o, d) \in S$ sei P_s die Menge aller einfachen Pfade, die Ursprung o mit Ziel d verbinden. Für einen Pfad p , der ein O-D-Paar verbindet, sei f_p der Fluss auf diesem Pfad. Beckmanns Transformation ist dann gegeben durch das folgende mathematische Programm [She85 | PERW15]:

$$\min z(f) = \sum_{e \in E} \int_0^{f_e} c_e(t) dt \quad (2.1a)$$

unter der Bedingung, dass

$$\forall s \in S : \sum_{p \in P_s} f_p = |s|, \quad (2.1b)$$

$$\forall s \in S, \forall p \in P_s : f_p \geq 0, \quad (2.1c)$$

$$\forall e \in E : f_e = \sum_{s \in S} \sum_{p \in P_s} \delta_{e,p} \cdot f_p. \quad (2.1d)$$

Für $\delta_{e,p}$ gilt

$$\delta_{e,p} = \begin{cases} 1, & \text{falls } e \text{ auf } p \text{ liegt} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bedingung 2.1b bestimmt, dass der Fluss auf allen Pfaden, die ein O-D-Paar verbinden, mit der Verkehrsnachfrage vom entsprechenden Start- zum Zielknoten übereinstimmt. Bedingung 2.1c ist für physikalisch sinnvolle Verkehrsflüsse notwendig, indem sie sicherstellt, dass auf keinem Pfad negativer Fluss besteht. Bedingung 2.1d definiert den Zusammenhang zwischen Verkehrsfluss auf Kanten und Verkehrsfluss auf Pfaden.

Die Zielfunktion 2.1 besitzt, anders als die Minimierung der Gesamtkosten nach Wardrops zweitem Prinzip, laut Sheffi keine anschauliche Erklärung [She85]. Es kann jedoch gezeigt werden, dass die Bedingungen erster Ordnung des mathematischen Programms gerade mit den Bedingungen für ein Nutzer-Equilibrium zusammenfallen. Die Lösung des Minimierungsproblems 2.1a liefert also ein Nutzer-Equilibrium entsprechend Wardrops erstem Prinzip.

Sind die Kostenfunktionen der Kanten im Netzwerkgraphen streng monoton steigend, so ist die minimierte Zielfunktion 2.1a als Summe streng konvexer Funktionen selbst streng konvex. Der Raum der möglichen Lösungen, bestimmt durch die Nebenbedingungen 2.1b-2.1d, ist ebenfalls konvex. Das mathematische Programm von Beckmann et al. hat also eine eindeutige Lösung [BMW56 | She85]. Wichtig ist hierbei jedoch, dass nur die Kantenflusswerte der Lösung eindeutig sind. Es kann zu einer festen Zuordnung von Kantenflüssen jedoch verschiedene Aufteilungen der Verkehrsnachfrage auf Pfade geben, die diese Flusswerte bewirken [She85].

2.4 Bestehende Lösungsansätze

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit bestehenden Lösungsansätzen für Traffic Assignment bei steigenden Kostenfunktionen der Kanten und bietet eine Übersicht über die Änderungen, die für die Lösung von Inverse Traffic Assignment nötig sind.

2.4.1 Berechnung eines Nutzer-Equilibriums

Im Folgenden werden Algorithmen vorgestellt, die Beckmanns Transformation lösen und damit ein Nutzer-Equilibrium berechnen.

Diese Lösungsalgorithmen können kategorisiert werden in die drei Gruppen der *Kanten-basierten* (engl. *link-based*), *Pfad-basierten* (engl. *path-based*) und *Busch-basierten* (engl. *bush-based*) Algorithmen [PERW15]. Die Gruppen unterscheiden sich in der Form, in der die Problemlösung repräsentiert wird. Kanten-basierte Algorithmen betrachten die Lösungen als eine Zuordnung von Flusswerten zu jeder Kante. Pfad-basierte Algorithmen definieren den Fluss pro Pfad. Busch-basierte Algorithmen verwenden Flusswerte pro Kante, jedoch aufgeteilt nach Startknoten (*origin* eines O-D-Paars) des entsprechenden Flusses [PERW15].

Kanten-basierte Algorithmen Frank und Wolfe präsentieren einen Algorithmus zur Maximierung einer konkaven Funktion (oder Minimierung einer konvexen Funktion) [FW56]. Dieser *Frank-Wolfe-Algorithmus* kann angewendet werden, um Traffic Assignment mit einem Kanten-basierten Algorithmus zu lösen [PERW15]. Es ist ein iterativer Algorithmus, der in jeder Iteration zu einer gegebenen möglichen Lösung eine Liniensuche in einer berechneten Abstiegsrichtung durchführt, um eine nächste mögliche Lösung zu finden [Fuk84].

Eine genauere Betrachtung des Frank-Wolfe-Algorithmus ist auch für Inverse Traffic Assignment nützlich. Dafür ist es wichtig, *All-Or-Nothing Assignment* (kurz: AON) zu beschreiben. AON ordnet jeweils die gesamte Verkehrsnachfrage zwischen einem O-D-Paar dem kürzesten Pfad bezüglich der gegebenen Kantengewichte zu [Dia71]. Eine initiale Lösung für den Frank-Wolfe-Algorithmus wird durch AON bezüglich der *Free-Flow-Gewichte* berechnet. Das Free-Flow-Gewicht einer Kante sind gerade die Reisekosten der Kante bei Kantennachfrage 0. In jeder Iteration i des Frank-Wolfe-Algorithmus liegt die Lösung $f^i = (f_{e_1}^i, \dots, f_{e_{|E|}}^i)$ der vorangegangenen Iteration vor (in Iteration 1 entspricht sie der initialen AON-Lösung). Sie gibt für jede Kante den entsprechenden Kantennachfrage an. In jeder Iteration wird wie folgt vorgegangen [BSW19]:

- 1 Berechnung des neuen Gewichts für jede Kante e gemäß f_e^i .
- 2 Berechnung neuer Kantennachfrüge \hat{f}^i mithilfe von AON bezüglich der neu berechneten Gewichte.
- 3 Ausführung einer Liniensuche auf der Linie zwischen f^i und \hat{f}^i . Die neue Lösung f^{i+1} ergibt sich dann durch Bewegung entlang der Linie gemäß der in der Suche berechneten Schrittweite.
- 4 Prüfung, ob in dieser Iteration das Konvergenzkriterium erfüllt ist.

Um die Konvergenzgeschwindigkeit des Frank-Wolfe-Algorithmus zu verbessern, existieren verschiedene Anpassungen des Algorithmus. Diese beziehen sich auf Änderungen in der Berechnung der Abstiegsrichtung in Schritt 2 oder auch der Schrittweite in Schritt 3 des oben beschriebenen Algorithmus [PERW15].

Pfad-basierte Algorithmen Bei Pfad-basierten Algorithmen werden für jedes O-D-Paar die Flusswerte auf den Pfaden betrachtet, die dieses O-D-Paar verbinden [FH95]. Dabei wird iterativ für jedes O-D-Paar der Fluss zwischen den entsprechenden Pfaden verschoben [PERW15]. Die verschiedenen Algorithmen können analysiert werden, indem für jedes O-D-Paar $s = (o, d)$ die Menge K_s^+ der Pfade mit positivem Fluss betrachtet wird, die Ursprung o und Ziel d verbinden [FH95 | BSW19]. Dafermos entwickelte den *PE-Algorithmus* (engl. *path equilibration algorithm*), bei dem Fluss jeweils vom Pfad mit den höchsten zu dem Pfad mit den niedrigsten Kosten aus K_s^+ verschoben wird. So werden für jedes O-D-Paar sukzessive die Kosten des teuersten und günstigsten Pfades angeglichen, bis ein Zustand eines Nutzer-Equilibriums erreicht ist. In diesem Zustand ist die Kostendifferenz zwischen jedem teuersten und günstigsten Pfad ausreichend klein beziehungsweise Null [Daf68 | FH95 | BSW19].

Andere pfad-basierte Algorithmen setzen das Angleichen der Kosten aller Pfade in K_s^+ anders um als der PE-Algorithmus. Jayakrishnan et al. verschieben Fluss nicht nur vom teuersten, sondern von mehreren teureren Pfaden zum günstigsten Pfad pro O-D-Paar [JTTPR94]. Im

Algorithmus von Florian et al. werden die Durchschnittskosten aller befahrenen Pfade pro O-D-Paar berechnet. Basierend darauf wird Fluss von Pfaden mit höheren Kosten als dieser Durchschnittswert zu Pfaden mit geringeren Kosten verschoben [FCF09].

Busch-basierte Algorithmen Busch-basierte Algorithmen verwalten für jeden Ursprungsknoten eines O-D-Paars einen gerichteten, azyklischen Graphen. Ein solcher Sub-Graph, der als Wurzel den entsprechenden Ursprungsknoten hat, wird *Busch* genannt und verbindet den Ursprungsknoten mit allen anderen Knoten im Netzwerk. Traffic Assignment wird gelöst, indem die Büsche jeweils iterativ erweitert oder verkleinert werden und der Fluss auf dem Busch in ein Equilibrium überführt wird. Dabei können die Algorithmen bei der Findung von günstigsten und teuersten Pfaden von der Kreisfreiheit profitieren [Nie10].

Ein Equilibrium auf einem Busch kann auf verschiedene Weisen erreicht werden. Dial stellt den *Algorithmus B* vor, der Fluss von teuersten zu günstigsten Pfaden verschiebt [Dia06]. Der von Gentile entwickelte *LUCE-Algorithmus* sucht an einzelnen Knoten einen Gleichgewichtszustand zwischen Routen, die zu einem gemeinsamen Zielknoten führen. Fluss wird entlang einer dadurch berechneten Abstiegsrichtung im Busch bewegt. Ein Busch ist hierbei also als Sub-Graph aus Pfaden mit gemeinsamem Zielknoten, statt gemeinsamem Ursprungsknoten, definiert [Gen14].

2.4.2 Ein Heuristisches Verfahren

Bevor Lösungsansätze für Beckmanns Transformation entstanden, wurden häufig heuristische Verfahren verwendet, um ein Nutzer-Equilibrium zu ermitteln [She85]. Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit einem solchen heuristischen Verfahren, *Capacity Restraint*. Die grundsätzliche Methode, um dabei Verkehr einem Netzwerk zuzuordnen, ist All-Or-Nothing Assignment (AON, siehe Abschnitt 2.4.1). AON berechnet kürzeste Pfade bezüglich einer statischen Gewichtsfunktion, wodurch die Wechselwirkungen zwischen Verkehrsfluss und steigenden / fallenden Kantenkosten nicht beachtet werden.

Capacity Restraint berücksichtigt diese Wechselwirkungen durch wiederholte Anwendung von AON und jeweils Neuberechnung der Kantenkosten. Der Algorithmus entsteht aus dem Frank-Wolfe-Algorithmus, wenn in jeder Iteration statt einer Berechnung einer Schrittweite durch Liniensuche eine konstante Schrittweite von 1 gewählt wird. Die Arbeitsweise des Algorithmus kann demnach wie folgt beschrieben werden [She85]:

- In einem initialen Schritt wird AON bezüglich der Free-Flow-Gewichte durchgeführt.
- Darauf folgt ein iteratives Verfahren, wobei in jeder Iteration folgende Schritte durchgeführt werden:
 - 1 Berechne neue Kantengewichte abhängig vom bisher berechneten Verkehrsfluss. Dieser ist in der ersten Iteration durch die Initiallösung gegeben, sonst durch die Lösung der Voriteration.
 - 2 Führe AON bezüglich der neu berechneten Kantengewichte durch.
 - 3 Ist die Änderung des Verkehrsflusses auf jeder Kante hinreichend klein, so stoppe. Andernfalls setze mit der nächsten Iteration fort.

Der beschriebene Algorithmus konvergiert nicht für allgemeine Straßennetzwerke und Verkehrsnachfrage, sofern Gewichtsfunktionen der Kanten eingesetzt werden, die im Verkehrsfluss steigen. Es können oszillierende Flussbewegungen entstehen, in denen sich die gleichen Wechsel der kürzesten Pfade pro O-D-Paar wiederholen. Verschiedene Modifika-

tionen können vorgenommen werden, um diesen Situationen vorzubeugen. Dabei kann ein fester, kleinerer Anteil der Verkehrsnachfrage eines O-D-Paars gewählt werden, der pro Iteration auf einen neuen durch AON berechneten kürzesten Pfad wechselt [Pat94]. Auch kann eine maximale Anzahl an Iterationen des Verfahrens festgelegt werden. Dass tatsächlich ein Nutzer-Equilibrium gefunden wird, ist jedoch nicht zu erwarten [She85].

2.5 Anwendung auf Inverse Traffic Assignment

Die bestehenden Lösungsalgorithmen lösen Traffic Assignment mit im Verkehrsfluss steigenden Kantenkosten. Für Inverse Traffic Assignment sind die Kostenfunktionen der Kanten nicht nur nicht streng monoton steigend, sondern werden als monoton fallend angenommen. Die Konsequenz ist, dass unter Nutzung der mathematischen Formulierung von Beckmann et al. keine streng konvexe Zielfunktion minimiert werden würde. Das Resultat sind multiple Minima, welche die Suche nach neuartigen Lösungsalgorithmen motivieren. Dieser Umstand der Nicht-Eindeutigkeit eines Nutzer-Equilibriums bei steigenden Kostenfunktionen wird in Kapitel 4 genauer betrachtet.

Dennoch sind einige Bestandteile bestehender Lösungsansätze und -algorithmen für Traffic Assignment auch bei der Betrachtung von fallenden Kostenfunktionen nützlich. Teile des Frank-Wolfe-Algorithmus finden sich in dem in dieser Arbeit vorgestellten Algorithmus zur Lösung von Inverse Traffic Assignment wieder. AON kann ebenso für im Kantenfluss fallende Gewichtsfunktionen eingesetzt werden. Da die Nutzung von Beckmanns Transformation in diesem Fall jedoch nicht zu einer streng konvexen Zielfunktion führt, wird das Verfahren angepasst.

Wird im Frank-Wolfe-Algorithmus die aus der Liniensuche resultierende Schrittweite konstant auf 1 gesetzt, stimmt er mit dem Capacity-Restraint-Algorithmus überein [She85]. Die Oszillationen, die bei der Anwendung des nicht zwingend konvergierenden Capacity-Restraint-Algorithmus entstehen können, hängen mit den im Fluss steigenden Kantenkosten zusammen. Ein neuer kürzester Pfad trägt nach AON die gesamte Verkehrsnachfrage des O-D-Paars, das er verbindet. Bei wiederholter Anwendung von AON kann durch resultierende Kostenerhöhungen solcher Pfade der kürzeste Pfad in jeder Iteration wechseln.

Für nicht-steigende oder sogar fallende Kantenkosten tritt dieser Effekt nicht auf, was den Einsatz von Capacity Restraint für Inverse Traffic Assignment motiviert. Dieser entscheidende Vorteil von sinkenden Kantenkosten für den Algorithmus wird in Kapitel 4 zum Lösungsverfahren für Inverse Traffic Assignment genauer beschrieben.

Bei der Lösung von Inverse Traffic Assignment wird auch ein Nutzer-Equilibrium angestrebt. In Kapitel 5 wird gezeigt, dass es für ein individuelles O-D-Paar beziehungsweise einen Verkehrsteilnehmer bei Inverse Traffic Assignment nicht kostenminimierend ist, die Verkehrsnachfrage auf mehr als einen Pfad aufzuteilen. Es wird also ein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien gesucht, das, wie in Abschnitt 2.2.1 beschrieben, mit einem Nutzer-Equilibrium übereinstimmt.

Der *price of anarchy* kann für Inverse Traffic Assignment nicht auf einen konstanten Faktor beschränkt werden. In Kapitel 4 wird näher auf diesen Umstand eingegangen und die Unbeschränktheit des Verhältnisses zwischen Kosten im Nutzer-Equilibrium und denen im System-Optimum anhand von Beispielgraphen hergeleitet.

3 Vorbemerkungen

In diesem Kapitel werden weitere Notation, Annahmen und Konstrukte eingeführt, die für die Lösung von Inverse Traffic Assignment wichtig sind. Abschnitt 3.1 definiert Inverse Traffic Assignment als Problem und stellt dabei getroffene Annahmen und die benötigte Notation vor. In Abschnitt 3.2 wird die für die Implementierung des Lösungsverfahrens eingesetzte Technik zur Berechnung von kürzesten Wegen beschrieben.

3.1 Notation und Problemdefinition

In dieser Arbeit wird das Problem Traffic Assignment unter der Annahme von steigenden Kantenkosten, die Reisezeit repräsentieren, *reguläres* Traffic Assignment genannt oder kurz *RTA*. Die Bezeichnung grenzt dieses Problem von Inverse Traffic Assignment (kurz: *ITA*) und den dabei angenommenen fallenden Kantenkosten ab.

Regeln der Routenwahl Allgemein wird in dieser Arbeit angenommen, dass die Berechnung einer kürzesten Route deterministisch ist. Die Verkehrsteilnehmer haben dabei vollständige und perfekte Informationen über das gesamte Netzwerk und dessen Auslastung.

Weiterhin wird angenommen, dass auch bei Gleichheit der Reisekosten stets ein eindeutiger kürzester Pfad zwischen Start- und Zielknoten jedes O-D-Paars existiert. Es wird über die Eindeutigkeit des kürzesten Pfades hinaus angenommen, dass bei Kostengleichheit zwischen zwei festen Pfaden, die ein O-D-Paar verbinden, stets der gleiche der beiden Pfade der eindeutig kürzeste Pfad ist. Diese weitere Annahme ist dafür wichtig, dass für einen Wechsel des kürzesten Pfades zwischen einem O-D-Paar eine echte Veränderung der Kostendifferenz zwischen den betreffenden Pfaden vorliegen muss.

Verkehrsnachfrage Die O-D-Paare sind in den folgenden Kapiteln allgemein als Multimenge S gegeben. Jedes Element $s = (o, d) \in S$ repräsentiert also genau einen Verkehrsteilnehmer und es kann mehrere Verkehrsteilnehmer geben, die vom gleichen Startpunkt o zum gleichen Zielpunkt d reisen. Jedem Element $s \in S$ wird dementsprechend die ganzzahlige Verkehrsnachfrage 1 zugeordnet. Dies ist motiviert dadurch, dass die Routenwahl für jeden Verkehrsteilnehmer immer ganzzahlig ist. Denn pro Verkehrsteilnehmer und pro O-D-Paar wird in einem Nutzer-Equilibrium für ITA die Reise und damit der Fluss nie auf mehr als einen Pfad aufgeteilt. Dieser Umstand folgt aus obiger Annahme zur Eindeutigkeit der kürzesten Pfade und wird in Abschnitt 5.1 genauer beschrieben. Die 1-zu-1-Zuordnung von Verkehrsteilnehmern und O-D-Paaren erlaubt Formulierungen in dieser Arbeit wie *Ein O-D-Paar wählt einen Pfad* oder *Ein O-D-Paar hat den Anreiz, von der aktuellen Routenwahl abzuweichen*.

Das Transportnetzwerk Das Transportnetzwerk ist gegeben durch einen gerichteten, gewichteten Graphen $G = (V, E)$. Jede Kante $e \in E$ repräsentiert eine Straße, die von Verkehrsteilnehmern befahren werden kann. Die Menge der Routen, die Start- und Zielpunkt mindestens eines O-D-Paars verbinden, ist durch die Menge P von einfachen Pfaden gegeben. Für jeden Pfad $p \in P$ gilt

$$p = \langle o, v_1, \dots, v_k, d \rangle$$

für $\{o, d, v_1, \dots, v_k\} \subseteq V$ und ein O-D-Paar $(o, d) \in S$. Für einen Pfad p , der die Start- und Zielknoten eines O-D-Paars s verbindet, wird in dieser Arbeit auch geschrieben: *Der Pfad p verbindet das O-D-Paar s .*

Die Reisekosten Die Reisekosten sind durch monoton fallende Funktionen

$$c_e : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

für jede Kante $e \in E$ gegeben. Der Wert $c_e(f_e)$ gibt also stets die Reisekosten der Kante $e \in E$ für den Kantenfluss f_e an. Eine wichtige Größe für die Reisekosten sind die *Free-Flow-Kosten* d_e einer Kante e . Die Free-Flow-Kosten entsprechen den Reisekosten über die Kante bei Kantenfluss 0. Die Benennung ist dadurch begründet, dass intuitiv die Kosten einer Reise in einem unausgelasteten Straßennetzwerk stark von der Distanz zwischen den Endpunkten abhängt. Die Variable u_e beschreibt in dieser Arbeit die Kapazität einer Kante des Straßennetzwerks.

Zwei laut Perederieieva et al. übliche Annahmen über die Reisekosten bei RTA werden in dieser Arbeit auch für ITA getroffen [PERW15]:

- 1 Additivität der Pfadkosten: die Reisekosten eines Pfades sind gegeben durch die Summe der Reisekosten der Kanten auf dem Pfad.
- 2 Trennbarkeit der Reisekosten: die Reisekosten einer Kante hängen nur vom Fluss auf dieser Kante und nicht vom Fluss auf anderen Kanten ab.

Perederieieva et al. beziehen sich bei den Annahmen explizit auf *Reisezeit*, für diese Arbeit werden allgemeinere *Reisekosten* betrachtet (siehe auch Kapitel 1).

Problemdefinition Mit den getroffenen Annahmen und der eingeführten Notation kann wie folgt das Problem definiert werden, das bei Inverse Traffic Assignment gelöst wird:

Gegeben:

- Straßennetzwerk $G = (V, E)$
- Monoton fallende Kostenfunktionen $c_e : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ für jede Kante $e \in E$
- Multimenge S der O-D-Paare

Gesucht:

Ein *Verkehrsfluss* $f = (f_{e_1}, f_{e_2}, \dots, f_{e_{|E|}}) \in \mathbb{N}_0^{|E|}$, also der Flusswert für jede Kante $e \in E$, der in einem Nutzer-Equilibrium gemäß der gegebenen Kantenkosten vorliegt.

Das Problem weicht von RTA in den monoton fallenden Kostenfunktionen mit ganzzahligem Definitionsbereich, in der Definition der O-D-Paare als Multimenge und in der Ganzzahligkeit der Lösung ab. Wichtig zu beachten ist auch, dass ITA nicht das gleiche Ziel wie Traffic Assignment verfolgt, für ein gegebenes Transportnetzwerk und gegebene Verkehrsnachfrage

die Auslastung der Straßen vorherzusagen. Das Ziel von ITA ist, wie in Abschnitt 1.1 angesprochen, die Bestimmung von Straßen, auf denen unter dem Anreiz zur geteilten Mehrnutzung der Straßen ein besonders hohes Verkehrsaufkommen entsteht. Auf diesen Straßen könnte der Ausbau der Möglichkeiten für öffentlichen und geteilten Verkehr dadurch besonders wirksam sein.

Der Pfadzustand Der Fluss auf jeder Kante ist eindeutig bestimmt durch die Routenwahl der Verkehrsteilnehmer beziehungsweise der O-D-Paare. Eine Wahl der befahrenen Route für jedes O-D-Paar sei beschrieben durch einen Vektor

$$Z_i = (p_i(s_1), p_i(s_2), \dots, p_i(s_{|S|})) \in P^{|S|},$$

der für jedes O-D-Paar $s = (o, d) \in S$ den für gegebene Kantengewichte eindeutigen kürzesten Pfad $p_i(s)$ zwischen Ursprung o und Ziel d angibt. Die Indizierung durch eine Zahl $i \in \mathbb{N}_0$ ist wieder motiviert durch iterative Lösungsverfahren, für die die kürzesten Pfade von der aktuellen Iteration abhängen. In den folgenden Kapiteln wird Z_i als der *Pfadzustand* der Iteration i bezeichnet.

3.2 Berechnung von kürzesten Wegen

Kürzeste Wege werden in dieser Arbeit anhand der von Dibbelt et al. entwickelten *Customizable Contraction Hierarchies* (CCH) berechnet [DSW16]. Diese stellen eine Erweiterung zu *Contraction Hierarchies* (CH) nach Geisberger et al. dar [GSSD08 | GSSV12]. Contraction Hierarchies beruhen auf der iterativen *Kontraktion* von Knoten in Reihenfolge einer Ordnung, die die Wichtigkeit der Knoten bewertet. Bei der Kontraktion werden Knoten aus dem Graphen entfernt, unter Erhaltung von kürzesten Pfaden im jeweils verbleibenden Graphen. Kürzeste Pfade $\langle u, v, w \rangle$, die über einen zu kontrahierenden Knoten v führen, werden hierfür bei Bedarf durch eine Direktverbindung zwischen den Endknoten u und w ersetzt [GSSD08].

Customizable Contraction Hierarchies Der Aufbau einer Contraction Hierarchy nach Geisberger et al. ist abhängig vom Gewicht der Kanten im Graphen [GSSD08 | GSSV12]. Zwischen den Iterationen der iterativen Lösungsverfahren für Traffic Assignment kommt es zu Änderungen der Kantengewichte aufgrund von geänderten Kantenauslastungen. Um solche Änderungen bei der Berechnung von kürzesten Pfaden zu berücksichtigen, muss für eine CH also jeweils erneut eine teure Vorverarbeitung durchgeführt werden.

Die Vorverarbeitung für Customizable Contraction Hierarchies nach Dibbelt et al. wird hingegen in zwei Schritte aufgeteilt. Der erste teure Schritt ist unabhängig von den Kantengewichten. Dessen Ergebnis wird im zweiten und günstigeren Schritt an gegebene Kantengewichte angepasst (engl. *customization*) [DSW16]. Auch das in dieser Arbeit vorgestellte Verfahren zur Lösung von Inverse Traffic Assignment kann von dieser Aufteilung profitieren, da sich ebenfalls für alle Änderungen des Verkehrsflusses auch die Kantengewichte ändern.

4 Das ITA-Verfahren

In diesem Kapitel wird das Verfahren eingeführt, mit dem im Rahmen dieser Arbeit eine Lösung für Inverse Traffic Assignment gefunden wird.

Die grundlegende Änderung von Inverse Traffic Assignment gegenüber regulärem Traffic Assignment sind die fallenden statt steigenden Kostenfunktionen der Straßen im Netzwerk. Unter diesem Anreiz zur geteilten Mehrnutzung der Straßen sollen die Routen ermittelt werden, auf denen der Ausbau der Möglichkeiten für geteilte und öffentliche Verkehrsmittel besonders wirksam sein könnte.

Die Idee ist, wie in Kapitel 1 angedeutet, dass eine erhöhte Verfügbarkeit dieser Verkehrsmittel eine erhöhte Nutzung der entsprechenden Straßen motivieren könnte. Die Straßen und Routen, auf denen durch diesen Effekt eine besonders hohe Auslastung entsteht, könnten dann durch einen geplanten Ausbau öffentlicher Verkehrsmittel besonders zu einer Reduzierung der Schadstoffemissionen und des Energieverbrauchs pro Verkehrsteilnehmer beitragen.

Es liegt also eine veränderte Annahme über das Verhalten der Verkehrsteilnehmer bei der Routenwahl vor. In Abschnitt 4.1 wird daher auf die Übertragung von Wardrops Prinzipien auf diese neuen Annahmen eingegangen und welche Änderungen sich für Nutzer-Equilibria und ihr Verhältnis zu System-Optima ergeben. Abschnitt 4.2 führt das konkrete Verfahren zur Bestimmung einer Lösung ein und Abschnitt 4.3 behandelt nützliche Kriterien für Kostenfunktionen, die für das Verfahren verwendet werden. Es werden monoton fallende Funktionen vorgestellt, die diese Kriterien erfüllen. Zuletzt beleuchtet Abschnitt 4.4 das Braess Paradoxon, das nicht nur für steigende, sondern auch für fallende Kostenfunktionen bei der Erweiterung von Straßennetzwerken auftreten kann.

4.1 Das Nutzer-Equilibrium und System-Optimum

Unter der Annahme, dass die Verkehrsteilnehmer unabhängig voneinander ihre individuelle Reisezeit minimieren, entsteht bei der Zuteilung der Verkehrsnachfrage auf ein Straßennetzwerk ein Nutzer-Equilibrium. Unter den Verhaltensannahmen, die für Inverse Traffic Assignment getroffen werden, ist die Reisezeit jedoch nicht das einzige Kriterium für die Messung der Reisekosten.

Für die Definition eines Nutzer-Equilibriums für ITA müssen also allgemeinere Kostenfunktionen auf den Kanten betrachtet werden. Repräsentieren diese Kosten auch Schadstoffemissionen und Energieverbrauch der Reise und sind somit fallend im Kantenfluss, so kann dennoch analog zu steigenden Kosten ein Nutzer-Equilibrium definiert werden. Eine Routenwahl für jeden Verkehrsteilnehmer sei für ITA genau dann ein Nutzer-Equilibrium, wenn für keinen Verkehrsteilnehmer eine Route mit günstigeren *Reisekosten* existiert.

Es ist wichtig zu beachten, dass die Annahme über das Verhalten der Verkehrsteilnehmer vorgibt, dass nur die aktuell vorliegenden Kantenkosten bei der Routenwahl betrachtet werden. Dies ist analog zu Wardrops erstem Prinzip, wonach Gleichheit der befahrenen Routen in

aktuellen Reisezeiten gilt. Es kann in einem Nutzer-Equilibrium bei fallenden Kantenkosten sein, dass ein Verkehrsteilnehmer seine Reisekosten durch individuelles Abweichen verringern würde. Dies kann geschehen, wenn die Route, auf die er abweicht, durch den erhöhten Fluss an Kosten verliert und damit günstiger als die aktuell befahrene Route wird.

Unter der getroffenen Annahme antizipieren die Verkehrsteilnehmer solche möglichen Kostenreduzierungen durch eigenes Abweichen nicht. Sie entscheiden ohne Absprachen mit Anderen individuell anhand der vorliegenden Situation. Die Lösung von ITA hat das Ziel, für fallende Kantenkosten Equilibriumszustände zu ermitteln, die dieser Annahme entsprechen.

Das System-Optimum kann analog definiert werden als eine Zuordnung von Verkehrsteilnehmern zu befahrenen Routen, die die Gesamtreisekosten, statt der Gesamtreisezeit, minimiert.

Für ITA existieren, wie für RTA, Kostenfunktionen und Netzwerke, die ein unbeschränktes Verhältnis zwischen Gesamtreisekosten in einem Nutzer-Equilibrium und denen im System-Optimum aufweisen. Solche Netzwerke mit einem O-D-Paar mit Verkehrsnachfrage 1 sind in Abbildung 4.1 dargestellt. Es liegt für das in Abbildung 4.1a abgebildete Netzwerk ein Nutzer-Equilibrium vor, wenn für den Fluss f_{e_1} auf Kante e_1 $f_{e_1} = 1$ und den auf Kante e_2 $f_{e_2} = 0$ gilt. Für diesen Verkehrsfluss entstehen Gesamtkosten $\frac{1}{2}$. Wird jedoch die Verkehrsnachfrage über die Kante e_2 geleitet, wenn also $f_{e_1} = 0$ und $f_{e_2} = 1$ ist, so entstehen Gesamtkosten $(\frac{1}{2})^n$. Diese Gesamtkosten fallen monoton in $n \in \mathbb{N}$ und konvergieren gegen 0.

Wie in Kapitel 2 beschrieben, kann der price of anarchy (POA) jedoch für RTA und Kantenkosten, die *linear* im Kantenfluss sind, durch einen konstanten Faktor beschränkt werden.

Für ITA kann der POA auch für solche Kantenkosten, die *linear* im Kantenfluss fallen, nicht durch eine Konstante beschränkt werden, sofern die Kostenfunktionen explizit durch 0 beschränkt sind und den Wert 0 annehmen können. Dies wird deutlich, wenn die Kantenkosten des Netzwerks in Abbildung 4.1a durch *linear* im Kantenfluss fallende Kosten ersetzt werden. Also durch Kosten der Form

$$c_{e_i}(f_{e_i}) = \begin{cases} d_{e_i} - \alpha \cdot f_{e_i}, & \text{falls } f_{e_i} \leq \frac{d_{e_i}}{\alpha} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für ein Free-Flow-Gewicht d_{e_i} der jeweiligen Kante e_i und ein $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Ein Beispiel ist in Abbildung 4.1b zu sehen. Für die Zuordnung von Kantenflüssen $f_{e_1} = 0$ und $f_{e_2} = 1$ entstehen für das abgebildete Netzwerk Gesamtkosten 0, während die Zuordnung $f_{e_1} = 1$ und $f_{e_2} = 0$ ein Nutzer-Equilibrium mit Gesamtkosten $\frac{1}{4}$ darstellt.

Für Kostenfunktionen, die sich beliebig nah an 0 annähern oder sogar einer Kante für ausreichend hohe Flusswerte die Kosten 0 zuweisen, kann der POA also unbeschränkt sein. Solche Kostenfunktionen, gerade letztere, sind jedoch wenig realistisch, worauf in Abschnitt 4.3 näher eingegangen wird.

4.1.1 Nicht-Eindeutigkeit des Nutzer-Equilibriums

Für das Nutzer-Equilibrium für steigende Kantenkosten kann Äquivalenz zur Lösung von Beckmanns Transformation gezeigt werden, die eindeutig ist [She85].

Für fallende Kantenkosten ist ein Nutzer-Equilibrium nicht zwingend eindeutig. Dies kann anhand des Netzwerks in Abbildung 4.2 erkannt werden. Es liegen zwei ganzzahlige Verkehrsflüsse vor, die beide ein Nutzer-Equilibrium darstellen. Wird der Fluss von O-D-Paar (o_1, d_1)

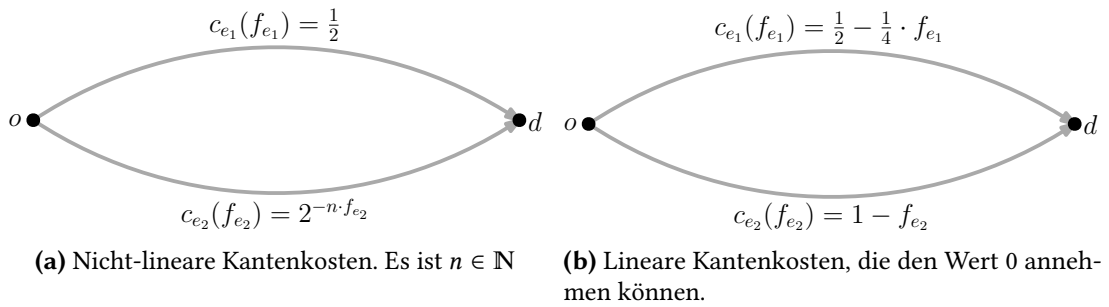


Abbildung 4.1: Netzwerke und ein O-D-Paar, für die das Verhältnis zwischen Kosten in einem Nutzer-Equilibrium und denen im System-Optimum unbeschränkt ist. Die Verkehrsnachfrage zwischen dem O-D-Paar betrage jeweils 1.

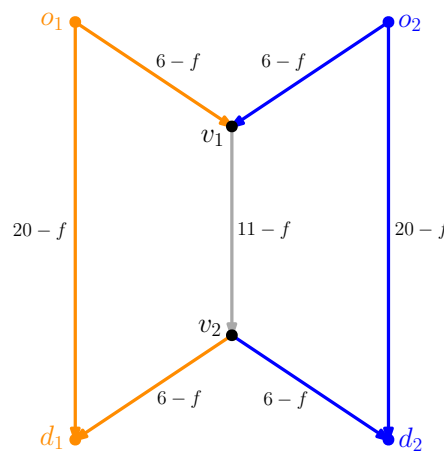


Abbildung 4.2: Netzwerk und zwei O-D-Paare, für die verschiedene Verkehrsflüsse existieren, die ein Nutzer-Equilibrium darstellen. Die Verkehrsnachfrage zwischen beiden O-D-Paaren betrage jeweils 1. Alle Kanten sind beschriftet mit der entsprechenden Kostenfunktion abhängig von Kantenfluss f . Kanten, die nur für ein O-D-Paar auf Pfaden von Start- zu Zielknoten liegen, sind entsprechend gefärbt.

über den Pfad $\langle o_1, v_1, v_2, d_1 \rangle$ und der Fluss von O-D-Paar (o_2, d_2) über den Pfad $\langle o_2, v_1, v_2, d_2 \rangle$ geleitet, so existiert für keines der O-D-Paare ein Pfad mit günstigeren Reisekosten, der Start- und Zielknoten verbindet. Das Gleiche gilt bei der Zuordnung von O-D-Paar (o_1, d_1) zu Pfad $\langle o_1, d_1 \rangle$ und O-D-Paar (o_2, d_2) zu Pfad $\langle o_2, d_2 \rangle$.

Im ersten Fall profitieren die den O-D-Paaren entsprechenden Verkehrsteilnehmer von der gemeinsamen Mehrnutzung der Kante (v_1, v_2) . Auf beiden Pfaden entstehen hierdurch Reisekosten 19, die kleiner sind als die Kosten 20, die auf den jeweils alternativen Pfaden vorliegen.

Im zweiten Fall liegen wieder Reisekosten 19 auf den Pfaden $\langle o_1, d_1 \rangle$ und $\langle o_2, d_2 \rangle$ vor. Die alternativen Pfade haben für beide O-D-Paare jeweils Kosten 23. Es kann also jeweils kein günstigerer Pfad gefunden werden. Insbesondere wird die mögliche Ersparnis durch gemeinsame Nutzung der Kante (v_1, v_2) nicht antizipiert. Hierfür müsste eine Absprache zwischen den Verkehrsteilnehmern stattfinden.

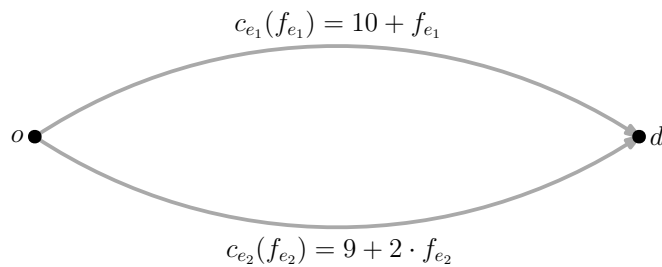


Abbildung 4.3: Netzwerk und O-D-Paar, für das der Capacity-Restraint-Algorithmus oszilliert. Die Verkehrsnachfrage zwischen dem O-D-Paar betrage 1. Das Netzwerk stellt eine vereinfachte Version eines Netzwerkes aus dem Buch von Sheffi dar ([She85], Seite 114).

Der folgende Abschnitt stellt ein Verfahren vor, das, wenn es konvergiert, unter der möglichen Mehrzahl an Nutzer-Equilibria ein solches findet, das der in Kapitel 1 erwähnten Intuition entspricht: Ein Nutzer-Equilibrium stellt sich über wiederholte Routenwahl der Verkehrsteilnehmer ein, die jeweils auf den wahrgenommenen Verkehrsfluss im vorherigen Zeitschritt reagieren.

4.2 Das Lösungsverfahren

Weit verbreitete Lösungsverfahren für RTA, wie der Frank-Wolfe-Algorithmus, minimieren eine konvexe Zielfunktion auf einem konvexen Lösungsbereich. Es existieren also eine eindeutige Lösung sowie Algorithmen, die gegen diese konvergieren. Für die fallenden Kostenfunktionen bei ITA ist die Zielfunktion von Beckmanns Transformation nicht konvex.

Da also ein Nutzer-Equilibrium für ITA nicht anhand Beckmanns Transformation als Lösung eines konvexen Optimierungsproblems berechnet werden kann, wird hier das in Abschnitt 2.4.2 erwähnte heuristische Verfahren *Capacity Restraint* als Lösungsverfahren auf ITA angewandt.

Der Einsatz von Capacity Restraint für ITA kann durch die im Fluss fallenden Kantenkosten motiviert werden. Ein Grund, weshalb Capacity Restraint für RTA nicht zwingend konvergiert, sind nämlich die steigenden Kantenkosten. Wird ein Pfad der kürzeste Pfad zwischen einem Startknoten und einem Zielknoten, wird der Fluss auf diesem Pfad durch AON um die gesamte Verkehrsnachfrage zwischen diesen Start- und Zielknoten erhöht. Bei steigenden Kantenkosten resultiert daraus eine Kostenerhöhung und damit kann in der nächsten Iteration ein Anreiz bestehen, von diesem Pfad wieder abzuweichen. Es entstehen auf diese Weise Oszillationen der kürzesten Pfade, da gerade der Umstand, dass ein Pfad ein kürzester Pfad ist, zu einer Verteuerung in der nächsten Iteration führen kann. Dieser Effekt kann anhand des Netzwerkes in Abbildung 4.3 veranschaulicht werden.

Initial wird durch AON der gesamte Fluss der Kante e_2 zugeordnet, also gilt $f_{e_1} = 0$ und $f_{e_2} = 1$. Dadurch steigen die Kosten der Kante e_2 auf 11, und sind damit größer als die Kosten 10 der Kante e_1 . In der folgenden Iteration wird der Fluss also der Kante e_1 zugeordnet, also gilt $f_{e_1} = 1$ und $f_{e_2} = 0$. Dadurch sinken die Kosten der Kante e_2 auf 9, während die Kosten der Kante e_1 auf 11 steigen. Der Fluss bewegt sich also wieder zurück zu e_2 . Diese Oszillation setzt sich unbegrenzt fort.

Für RTA und steigende Kantenkosten wird dieses Problem gelöst, wenn Capacity Restraint zum Frank-Wolfe-Algorithmus erweitert wird, indem eine Liniensuche in jeder Iteration die Schrittweite zur AON-Lösung bestimmt.

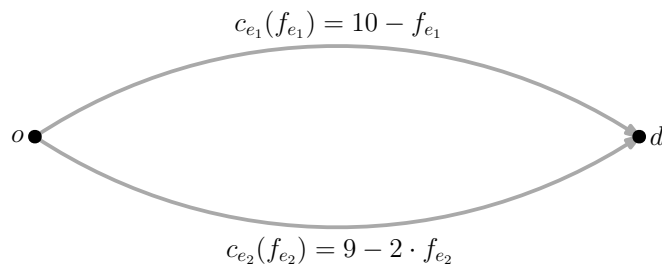


Abbildung 4.4: Netzwerk und O-D-Paar, für das der Capacity-Restraint-Algorithmus konvergiert. Die Verkehrsnachfrage zwischen dem O-D-Paar betrage wieder 1.

Für fallende Kostenfunktionen bei ITA können solche Oszillationen, für die die Routenwahlen aus jeder Iteration i genau den Routenwahlen aus Iteration $i + 2$ entsprechen, nicht auftreten. Ein formaler Beweis hierfür wird Kapitel 5 geliefert. Intuitiv kann der Vorteil von fallenden Kostenfunktionen für Capacity Restraint anhand des Netzwerks in Abbildung 4.4 veranschaulicht werden.

Das Netzwerk entspricht gerade dem aus Abbildung 4.3, mit der Änderung, dass die Kantenkosten nun im Kantenfluss fallen. Die Kante e_2 hat mit Kosten 9 geringere Free-Flow-Kosten als die Kante e_1 mit Kosten 10. Der Fluss wird also initial durch AON wieder der Kante e_2 zugeordnet. Die AON-Zuordnung von Fluss zu einem kürzesten Pfad hat nun aber gerade den zu RTA gegensätzlichen Effekt, dass der Pfad noch günstiger wird. Die Kosten von Kante e_2 sinken auf 7, während die Kosten von Kante e_1 unverändert bleiben. Das Verfahren konvergiert damit schon nach der ersten Iteration.

Unter der Annahme für RTA, dass Verkehrsteilnehmer lediglich die individuelle Reisezeit minimieren, ist die Kapazität der Straßen eine wichtige Größe, da sie die Bildung von Stau bei hoher Auslastung bestimmt. Der Name Capacity Restraint deutet darauf hin, dass der Algorithmus diese Effekte auf die Reisezeit beachtet und impliziert somit im Kantenfluss steigende Reisekosten. Capacity Restraint wird für die veränderten Reisekosten bei ITA in dieser Arbeit also als *ITA-Verfahren* bezeichnet.

Das ITA-Verfahren zur Berechnung eines Nutzer-Equilibriums unter fallenden Kantenkosten ist mit der in Abschnitt 3.1 eingeführten Notation durch Algorithmus 4.1 gegeben.

Analog zu Capacity Restraint für RTA führt das ITA-Verfahren initial AON auf den Free-Flow-Gewichten aus (Zeile 1) und wiederholt diesen Schritt in einem iterativen Verfahren unter Neuberechnung der Kantengewichte in jeder Iteration (Zeilen 4 – 16). In den Zeilen 6 und 7 werden die neuen Gewichte abhängig vom Verkehrsfluss der vorherigen Iteration (beziehungsweise der Initiallösung) berechnet. In den Zeilen 8 – 12 wird AON bezüglich der neu berechneten Kantengewichte ausgeführt und der Flusswert auf jeder Kante inkrementiert für jedes O-D-Paar, auf dessen kürzestem Pfad die Kante liegt. Hierbei ist zu beachten, dass die O-D-Paare als eine Multimenge gegeben sind, deren Elemente jeweils genau einen Verkehrsteilnehmer darstellen (siehe Kapitel 3). Hat sich für keine Kante der Kantenfluss verändert, ist das Verfahren konvergiert (Zeilen 13 – 16). Es kann ebenfalls eine maximale Anzahl an Iterationen i_{\max} definiert werden, nach denen das Verfahren terminiert.

Um auf ein Nutzer-Equilibrium zu testen, muss beim Konvergenztest streng genommen für jedes O-D-Paar überprüft werden, ob sich in der Iteration für die neue Gewichtsfunktion der kürzeste Pfad zwischen dem entsprechenden Start- und Zielknoten geändert hat. Hierfür müsste für jedes O-D-Paar der gesamte kürzeste Pfad gespeichert werden (der im Laufe des

Algorithmus 4.1 : Das ITA-Verfahren.

Input : Straßennetzwerk $G = (V, E)$,
 Kostenfunktionen $c_e : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ für jede Kante $e \in E$,
 Multimenge S der O-D-Paare,
 Maximale Anzahl an Iterationen $i_{\max} \in \mathbb{N}$.

Output : Verkehrsfluss $(f_{e_1}, \dots, f_{e_{|E|}})$ in einem Nutzer-Equilibrium.

```

1  $f^0 \leftarrow (f_{e_1}^0, \dots, f_{e_{|E|}}^0)$ , AON bezüglich Free-Flow-Gewichten  $d_e$ 
2  $i \leftarrow 0$ 
3  $converged \leftarrow False$ 
4 while not converged and  $i < i_{\max}$  do
5    $i \leftarrow i + 1$ 
6   forall  $e \in E$  do
7      $c_i(e) \leftarrow c_e(f_e^{i-1})$ 
8    $f^i \leftarrow (0, \dots, 0) \in \mathbb{N}_0^{|E|}$ 
9   forall  $(o, d) \in S$  do
10     $p \leftarrow$  kürzester Pfad zwischen Knoten  $o$  und  $d$  bezüglich Gewichten  $c_i$ 
11    forall  $e \in E$  on  $p = \langle o, \dots, d \rangle$  do
12       $f_e^i \leftarrow f_e^{i-1} + 1$ 
13    $converged \leftarrow True$ 
14   forall  $e \in E$  do
15     if  $f_e^i \neq f_e^{i-1}$  then
16        $converged \leftarrow False$ 
17 return  $f^i$ 

```

Verfahrens der Erwartung nach länger wird) und auf Gleichheit jeder Kante mit dem jeweils neu berechneten Pfad getestet werden. Dieser Mehraufwand kann aufgrund der folgenden Beobachtung vermieden werden. Ändert sich in Iteration i der Fluss auf keiner Kante, so ändert sich auch das Kantengewicht von keiner Kante in der nachfolgenden Iteration $i+1$. Eine deterministische Kürzeste-Wege-Berechnung berechnet dann in Iteration $i+1$ die gleichen kürzesten Pfade wie in Iteration i . Der strenge Konvergenztest ist also erst in Iteration $i+1$ erfolgreich, wobei schon in Iteration i der gleiche Verkehrsfluss und die gleichen kürzesten Pfade pro O-D-Paar vorlagen, die das gefundene Nutzer-Equilibrium darstellen.

Konvergiert das Verfahren, gibt es also den Verkehrsfluss zu einer Routenwahl zurück, bezüglich der es für keinen Verkehrsteilnehmer eine günstigere alternative Route gibt. Die Routenwahl entspricht gerade dem Nutzer-Equilibrium, das aus einer Simulation von Verkehrsteilnehmern (O-D-Paaren) resultiert, die in einem Straßennetzwerk über eine Reihe von Zeitschritten (Iterationen) hinweg jeweils die günstigste Route von ihrem Start- zum Zielpunkt befahren und dabei gemäß der im letzten Zeitschritt beobachteten Straßennutzung (Verkehrsfluss der vorherigen Iteration) entscheiden.

Konvergenzkriterien Es können alternative Konvergenzkriterien zu dem Test auf perfekte Konvergenz aus Algorithmus 4.1 genutzt werden. Sheffi schlägt für den Frank-Wolfe-Algorithmus die folgenden beiden Kriterien vor. Zum einen kann die Ähnlichkeit der Reisekosten pro O-D-Paar von aufeinanderfolgenden Iterationen gemessen werden. Zum anderen

kann die Ähnlichkeit aufeinanderfolgender Flusswerte pro Kante verwendet werden, um die Nähe der gefundenen Lösung zu einem Nutzer-Equilibrium zu messen [She85]. Hierbei können die gemessenen Abstände der Lösungen zweier aufeinanderfolgenden Iterationen jeweils mit einer kleinen Konstante verglichen werden, um auf hinreichende Konvergenz zu testen.

Ein für bisherige Lösungsalgorithmen von RTA weit verbreitetes Konvergenzkriterium ist der *relative gap* (kurz: *RGAP*) [BRB04 | PERW15 | BSW19 | Nie10 | FCF09 | Dia06 | Gen14 | ML13]. Der RGAP ist die relative Differenz zwischen den aktuellen Gesamtreisekosten der Iteration und den Gesamtkosten, die entstehen, wenn nur die aktuell günstigsten Pfade befahren werden. Für den in Iteration i berechneten Verkehrsfluss f^i ist der RGAP gegeben durch

$$\frac{\sum_{e \in E} f_e^i \cdot c_e(f_e^i) - \sum_{s \in S} d_s(f^i)}{\sum_{e \in E} f_e^i \cdot c_e(f_e^i)}. \quad (4.1)$$

Der Wert $d_s(f^i)$ gibt dabei die Kosten des für den Verkehrsfluss f^i günstigsten Pfads an, der das O-D-Paar s verbindet. Die Definition des RGAP in Gleichung 4.1 weicht wegen der 1-zu-1-Beziehung von Verkehrsteilnehmern und O-D-Paaren von der üblichen Definition in der Notation ab. Wäre S nicht als Multimenge definiert, so müsste der Wert $d_s(f^i)$ jeweils noch mit der Verkehrsnachfrage zwischen dem O-D-Paar s multipliziert werden.

In einem Nutzer-Equilibrium sind die tatsächlich befahrenen Routen gerade die günstigsten für die O-D-Paare, die sie verbinden, sonst könnte ein Verkehrsteilnehmer auf eine Route mit geringeren Kosten abweichen. Der RGAP beträgt im Nutzer-Equilibrium also 0. Um auf hinreichende Konvergenz zu testen, kann der RGAP mit einer kleinen positiven Konstante verglichen werden.

Die von Sheffi vorgeschlagenen alternativen Konvergenzkriterien messen Änderungen in den Kantenflüssen und in den entstehenden Reisekosten zwischen aufeinanderfolgenden Iterationen. Der RGAP misst den Unterschied der Kosten zwischen den aktuell gewählten Routen und den aktuell kürzesten Routen. Die drei Kriterien messen also insbesondere nicht, ob sich die Route eines O-D-Paars hinreichend mit der Route im Nutzer-Equilibrium überschneidet. Wechsel der kürzesten Route könnten also auch nach Erfüllung der Kriterien noch zu starken Kostenänderungen führen. Bei Tests des ITA-Verfahrens auf verschiedenen Eingaben können weiter starke Schwankungen im Wert des RGAP auch in späten Iterationen kurz vor Erreichen eines Nutzer-Equilibriums beobachtet werden (siehe Kapitel 6). Es sollte also für ein gegebenes Straßennetzwerk stets überprüft werden, ob die Verringerung der Iterationsanzahl gegenüber dem strengen Konvergenztest aus Algorithmus 4.1 nötig ist.

4.3 Bestimmung von Kostenfunktionen

Neben dem Straßennetzwerk und der Verkehrsnachfrage zwischen jedem O-D-Paar sind die Reisekosten für jede Straße die dritte Eingabevariable für Traffic Assignment. In diesem Abschnitt werden im Kantenfluss fallende Kostenfunktionen für die Lösung von Inverse Traffic Assignment vorgestellt. Dabei sollen die Annahmen über das Verhalten bei der Routenwahl unter dem Anreiz zur geteilten Mehrnutzung der Straßen genutzt werden.

Für RTA existieren verschiedene Kostenfunktionen, die für die in Abschnitt 2.4 beschriebenen Lösungsverfahren verwendet werden. Spiess definiert eine allgemeine Form der Kostenfunktion, die die Reisezeit $c_e(f_e)$ einer Kante e wie folgt anhand des gegebenen Kantenflusses f_e berechnet [Spi90]:

$$c_e(f_e) = d_e \cdot g\left(\frac{f_e}{u_e}\right). \quad (4.2)$$

Der Wert d_e entspricht der Free-Flow-Reisezeit auf der Kante e und der Wert u_e bestimmt die Kapazität der Kante. Die Funktion g , die als Eingabe das Verhältnis zwischen Kantenfluss und maximalem Kantenfluss erhält, wird von Spiess *Stau-Funktion* (engl. *congestion function*) genannt.

Laut Branston ist eine der gängigsten Kostenfunktionen die BPR-Kostenfunktion [Bra76 | Pub64]. Diese Funktion entsteht aus der allgemeinen Form 4.2 durch Definieren der Stau-Funktion anhand $g(x) = 1 + \alpha_e \cdot x^{\beta_e}$ für jede Kante e des Straßennetzwerks, ist also insgesamt gegeben durch [Pub64 | BSW19 | PERW15]:

$$c_e(f_e) = d_e \cdot \left(1 + \alpha_e \left(\frac{f_e}{u_e}\right)^{\beta_e}\right). \quad (4.3)$$

Hierbei sind die zusätzlichen Parameter α_e und β_e für jede Kante e zu definieren. Die Notation orientiert sich an der Arbeit von Buchhold et al. [BSW19].

Die oben betrachteten Konzepte einer Kostenfunktion beziehen sich ausschließlich auf im Kantenfluss steigende Kostenfunktionen. Die allgemeine Form einer Kostenfunktion nach Formel 4.2 ist jedoch auch für ITA und fallende Kostenfunktionen nützlich. Die Kosten der Kanten sollen für ITA ebenfalls abhängen von der Free-Flow-Reisezeit, die auch bei einem Anreiz zur Mehrnutzung einer Kante in die Kostenbewertung einfließt. So soll bei gleichem Kantenfluss stets ein solcher Pfad als günstiger bewertet werden, der für den entsprechenden Verkehrsteilnehmer mit geringerer Reisezeit im unausgelasteten Netzwerk verbunden ist. Eine Abweichung der Kosten von der Free-Flow-Reisezeit wird erreicht durch positiven Fluss auf der entsprechenden Kante. Wird für die Funktion g in Formel 4.2 also eine monoton fallende Funktion eingesetzt, entspricht die Formel einer solchen Kostenbewertung.

Für ITA können Kostenfunktionen als unabhängig von der Kantenkapazität definiert werden unter der vereinfachenden Annahme, dass bei Auslastung der Kantenkapazität die eingesetzten öffentlichen Verkehrsmittel vergrößert werden können und damit die maximal mögliche Anzahl an Verkehrsteilnehmern auf der Kante steigt. Eine vereinfachte allgemeine Form der Kostenfunktionen für ITA kann somit wie folgt definiert werden:

$$c_e(f_e) = d_e \cdot h_e(f_e). \quad (4.4)$$

Die Funktion h_e wird als *Kooperations-Funktion* bezeichnet, um erhöhte Kantenauslastung nicht als Stau, sondern als gewünschtes Ergebnis hervorzuheben. Die Funktion definiert die mögliche Reduktion des Schadstoffausstoßes und Energieverbrauchs bei steigender Anzahl an Verkehrsteilnehmern auf der entsprechenden Straße.

Es gilt nun also, Definitionen der Kooperations-Funktion h_e zu finden, die diesen Effekt repräsentieren. Dafür werden die folgenden Bedingungen präsentiert, die eine Kostenfunktion c_e für ITA für jede Kante e erfüllen sollte:

- 1 Die Funktion c_e muss monoton fallend sein. Dies stellt die zentrale Änderung gegenüber RTA dar.

- 2 Die Funktion c_e darf keine negativen Werte annehmen. Ohne diese Bedingung könnte das Befahren von negativen Pfaden oder Kreisen die Reisekosten reduzieren. Das Befahren von zusätzlichen Straßen bedingt jedoch immer sowohl erhöhten Schadstoffausstoß als auch erhöhte Reisezeit und sollte daher nie mit negativen Kosten bemessen werden.
- 3 Es gilt $c_e(0) = d_e$. Dies modelliert, dass sich Verkehrsteilnehmer in einem unausgelasteten Netzwerk anhand der Free-Flow-Reisezeit entscheiden. Insgesamt folgt also

$$\forall e \in E, \forall f_e \in \mathbb{N}_0 : 0 \leq c_e(f_e) \leq d_e .$$

Weitere optionale Kriterien:

- 4 Die Funktion c_e ist *streng* monoton fallend, also gilt für die Ableitung

$$\frac{d}{df_e} c_e(f_e) < 0 \text{ für alle } f_e \in \mathbb{N}_0 .$$

Dies muss erfüllt werden, wenn jede Änderung der Routenwahl eines Verkehrsteilnehmers eine nicht verschwindende Wirkung haben soll.

- 5 Die Funktion c_e ist streng konvex, also gilt für die zweite Ableitung

$$\frac{d^2}{df_e^2} c_e(f_e) > 0 \text{ für alle } f_e \in \mathbb{N}_0 .$$

Dies modelliert, dass die Einsparungen an Emissionen und Energieverbrauch pro zusätzlichem Verkehrsteilnehmer bei steigender Anzahl an Verkehrsteilnehmern abnehmen. Wenn angenommen wird, dass der Wechsel von Transport in individuellen Fahrzeugen zum Einsatz eines öffentlichen Verkehrsmittels wirksamer ist als der Wechsel von einem öffentlichen Verkehrsmittel zu einem Größeren, kann dieses Kriterium nützlich sein.

- 6 Die Funktion c_e nähert sich nicht beliebig nah an 0 an. Beispielsweise kann ein Schwellenwert $\frac{d_e}{n}$ definiert werden für ein $n \in \mathbb{N}$, den die Kostenfunktion c_e für keinen Kantenfluss f_e unterschreitet. So wird modelliert, dass Verkehrsteilnehmer nie einen Umweg mit n -facher Reisezeit wählen, gemessen anhand der Free-Flow-Reisezeit im Netzwerk. Ein solcher Schwellenwert kann auch dafür nützlich sein, die Überlastung von Straßen zu verhindern. Auch beim Transport in großen öffentlichen Verkehrsmitteln erhöhen zusätzliche Verkehrsteilnehmer die Auslastung einer Straße. Für die Definition einer unteren Schranke für die Kantenkosten kann also die Kapazität der Straße und zum Beispiel die Platzanzahl des größten verfügbaren Verkehrsmittels nützlich sein.

Die Bedingungen sind in Teilen angelehnt an Bedingungen, die Spiess für Stau-Funktionen formuliert [Spi90].

4.3.1 Exponentengewichtete Kostenreduzierung

Eine Möglichkeit für eine streng monoton fallende, streng konvexe und positive Funktion stellt die Funktion $f_e \mapsto \frac{1}{f_e}$ auf $\mathbb{R}_{>0}$ dar, deren Graph die Koordinatenachsen als Asymptoten hat. Sie kann also als Teil einer Kostenfunktion genutzt werden, um Bedingungen 1,2,4 und 5 zu erfüllen. Um den Einfluss einer Erhöhung oder Verringerung des Kantenflusses auf den

Wert der Funktion zu gewichten, kann die Funktion durch einen Exponenten $\beta_e \in \mathbb{R}_+$ zu $f_e \mapsto \frac{1}{f_e^{\beta_e}}$ erweitert werden. Auf Basis dessen kann durch eine weitere Erweiterung um den Parameter $\alpha_e \in \mathbb{R}_+$ eine Kooperations-Funktion durch

$$h_e(f_e) = \left(\frac{\alpha_e}{f_e + \alpha_e} \right)^{\beta_e}$$

definiert werden, die zusätzlich Bedingung 3 erfüllt. Aus der allgemeinen Form 4.4 entsteht damit die folgende Kostenfunktion:

$$c_e(f_e) = d_e \cdot \left(\frac{\alpha_e}{f_e + \alpha_e} \right)^{\beta_e}. \quad (4.5)$$

Ein weiteres Motiv für den Vorschlag dieser Kostenfunktion ist die Ähnlichkeit zu der Funktion, die entsteht, wenn in der BPR-Kostenfunktion 4.3 ein negativer Exponent $\beta_e < 0$ gewählt wird und die Kantenkapazität keinen Einfluss auf die Kosten hat. Der Parameter α_e beeinflusst weiterhin multiplikativ den Effekt von verändertem Kantenfluss auf die Kantenkosten, wobei der Einfluss des Parameters, anders als für BPR-Kosten, zusätzlich durch den Exponenten β_e gewichtet wird. Die Verwendung der Kostenfunktion in Formel 4.5 wird als *Exponentengewichtete* Kostenreduzierung bezeichnet. Ein Nachteil dieser Art der Kostenreduzierung ist, dass sich die Kosten einer Kante dabei beliebig nah an 0 annähern können und damit Bedingung 6 nicht erfüllt ist.

In Abbildung 4.5a ist ein Plot der Kostenfunktion für Exponentengewichtete Kostenreduzierung zu sehen.

4.3.2 Logarithmische Kostenreduzierung

Die Funktion $f_e \mapsto \frac{1}{\log_{\alpha_e}(f_e)}$ ist für $\alpha_e > 1$ auf $\mathbb{R}_{>1}$ ebenfalls streng monoton fallend, streng konvex und positiv, kann also ähnlich wie für Exponentengewichtete Kostenreduzierung als Teil einer Kostenfunktion verwendet werden, die die Bedingungen 1,2,4 und 5 erfüllt. Mit einer Kooperations-Funktion gegeben durch

$$h_e(f_e) = \frac{1}{\log_{\alpha_e}(f_e^{\beta_e} + \alpha_e)}$$

erfüllt die folgende Kostenfunktion zusätzlich Bedingung 3:

$$c_e(f_e) = d_e \cdot \frac{1}{\log_{\alpha_e}(f_e^{\beta_e} + \alpha_e)}. \quad (4.6)$$

Der Einfluss des Kantenflusses auf die Kosten kann durch die Wahl der Basis des Logarithmus $\alpha_e > 1$ und des Exponenten $\beta_e > 0$ gewichtet werden.

Die Verwendung dieser Kostenfunktion, bezeichnet als *Logarithmische* Kostenreduzierung, soll den Effekt verstärken, dass Kantenkosten bei geringerem Kantenfluss stärker durch zusätzlichen Fluss sinken als bei hohem Kantenfluss. Die Annahme dabei folgt der Beschreibung in Bedingung 5, dass für kleinere vorliegende Anzahlen an Verkehrsteilnehmern auf einer Straße größere Einsparungen an Emissionen pro zusätzlichem Verkehrsteilnehmer möglich sein könnten. Dass die Kostenfunktion in steigendem Verkehrsfluss schnell flach wird, kann ebenfalls dadurch motiviert werden, dass auch beim Einsatz von großen öffentlichen Verkehrsmitteln Überlastungen bei zu hohen Kantenflüssen entstehen können. Die Kostenfunktion im folgenden Abschnitt erfüllt die Bedingung 6, um solche hohen Auslastungen zu verhindern.

Abbildung 4.5b zeigt einen Plot der Kostenfunktion zu Logarithmischer Kostenreduzierung.

4.3.3 Kapazitätsbeschränkte Kostenreduzierung

Bei den bisherigen Definitionen von Kostenfunktionen wurde die Kapazität einer Kante nicht beachtet, was der Annahme entspricht, dass der Auslastung einer Straße durch den Einsatz größerer öffentlicher Verkehrsmittel entgegengewirkt werden kann.

Dennoch könnte es nützlich sein, dass sich die Kosten einer Kante nicht weiter verringern, sobald eine bestimmte Kantenauslastung erreicht ist, wie in Bedingung 6 beschrieben. Betrachte hierfür die folgende Kostenfunktion c_e für eine Kante e . Die Wahl des Parameters r bestimmt dabei die obere Schranke $u_e \cdot r$, für die bei der Erhöhung von Kantenfluss, der sie überschreitet, keine weitere Kostenreduzierung erfolgt. Weiter ist $u_{\min} := \min_{e \in E} u_e$ die minimale Kapazität einer Kante im Netzwerk.

$$c_e(f_e) = \begin{cases} d_e \cdot \frac{u_{\min}}{u_e} \cdot \frac{1}{(f_e+1)^{\beta_e}}, & \text{falls } f_e < u_e \cdot r \\ d_e \cdot \frac{u_{\min}}{u_e} \cdot \frac{1}{(u_e \cdot r)^{\beta_e}}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.7)$$

Der Exponent $\beta_e \in \mathbb{R}_+$ gewichtet wie bisher den Einfluss des Kantenflusses auf die Kosten. Die Verwendung dieser Kostenfunktion wird als *Kapazitätsbeschränkte* Kostenreduzierung bezeichnet. Der Faktor $\frac{u_{\min}}{u_e}$ erzeugt den Effekt, dass die Kantenkosten in der Kantenkapazität fallen. Der Faktor kann durch die Annahme motiviert werden, dass auf Straßen mit hoher Kapazität besonders von öffentlichen Verkehrsmitteln profitiert werden könnte. Die Annahme folgt der Überlegung, dass auf breiteren oder weiter ausgebauten Straßen größere öffentliche Verkehrsmittel eingesetzt werden könnten und dass der Ausbau der Möglichkeiten für die Reise in öffentlichen Verkehrsmitteln leichter umzusetzen sein könnte. Wird die kostenreduzierende Wirkung von erhöhter Kantenkapazität schon in der Eingabe beachtet und die veränderten Free-Flow-Kosten $\hat{d}_e := d_e \cdot \frac{u_{\min}}{u_e}$ für jede Kante $e \in E$ verwendet, so ist auch weiterhin Bedingung 3 erfüllt.

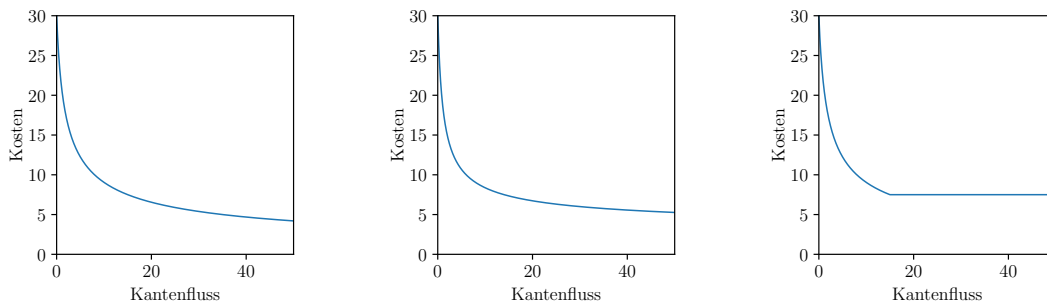
Kapazitätsbeschränkte Kostenreduzierung hat die Nachteile, dass die Kostenfunktion in Formel 4.7 nicht streng monoton fallend und nicht streng konvex ist. Weiterhin ist sie nicht differenzierbar. Sie kann jedoch als Beispiel dafür dienen, wie durch weitere Größen wie die Kantenkapazitäten Einfluss auf die durch das ITA-Verfahren berechneten Verkehrsflüsse ausgeübt werden kann.

Abbildung 4.5c zeigt einen Plot der Kostenfunktion zu Kapazitätsbeschränkter Kostenreduzierung.

4.3.4 Diskussion der Kostenfunktionen

Für die drei Kostenfunktionen hängt der Verlauf der Kantenkosten im ITA-Verfahren neben der Wahl der Funktionsparameter stark von der Anzahl an O-D-Paaren, dem Straßennetzwerk und für die Funktion 4.7 auch von der Definition der Kantenkapazitäten ab. Weiter sind die Kostenfunktionen nicht durch tatsächlich beobachtetes Verhalten der Verkehrsteilnehmer gestützt.

Die präsentierten Kostenfunktionen sollen also vor allem dazu dienen, erste Ideen und Kriterien für die Definition weiterer Funktionen zu liefern, um gewünschte Effekte beim Inverse Traffic Assignment herbeizuführen. In Kapitel 6 wird untersucht, welche Auswirkungen die Kostendefinitionen dieses Abschnitts auf die resultierende Verkehrssituation haben.



(a) Exponentengewichtete Kostenreduzierung nach Gleichung 4.5 für $\alpha_e = 1$ und $\beta_e = 0,5$.

(b) Logarithmische Kostenreduzierung nach Gleichung 4.6 für $\alpha_e = 2$ und $\beta_e = 1$.

(c) Kapazitätsbeschränkte Kostenreduzierung nach Gleichung 4.7 für $r = 1$, $u_{\min} = u_e = 15$ und $\beta_e = 0,5$.

Abbildung 4.5: Plots der vorgeschlagenen Kostenfunktionen für eine Kante e mit Kapazität $u_e = 15$ und Free-Flow-Gewicht $d_e = 30$.

4.4 Das Braess Paradoxon

In regulärem Traffic Assignment können Straßennetzwerke und O-D-Paare gefunden werden, die paradoxe Kostenentwicklungen bei Erweiterung des Netzwerks aufzeigen [Bra68]. Das Hinzufügen einer weiteren Kante kann dazu führen, dass sich für alle Nutzer des Straßennetzwerks die Kosten ihrer Route im Nutzer-Equilibrium erhöhen.

Abbildung 4.6 zeigt einen von D. Braess gefundenen Beispielgraphen für diese Situation, die entsprechend als *Braess Paradoxon* bezeichnet wird ([Bra68], [FH95]). In Abbildung 4.6a ist das *Braess Netzwerk* zu sehen. Für das Netzwerk wird ein einziges O-D-Paar betrachtet mit Verkehrsnachfrage 6 von Knoten o zu Knoten d . Im eindeutigen Nutzer-Equilibrium teilt sich der Verkehrsfluss zu gleichen Teilen auf die Pfade $p_1 = \langle o, v_1, d \rangle$ und $p_2 = \langle o, v_2, d \rangle$ auf. Im Equilibrium gilt also für die Kantenflüsse $f_{e_1} = f_{e_2} = f_{e_3} = f_{e_4} = 3$ und beide Pfade haben Reisekosten 83.

Abbildung 4.6b zeigt das gleiche Netzwerk nach Hinzufügen der Kante e_5 . Das Nutzer-Equilibrium hat sich hierdurch geändert. Im Equilibrium teilt sich der Verkehrsfluss nun zu gleichen Teilen auf die Pfade $p_1 = \langle o, v_1, d \rangle$ und $p_2 = \langle o, v_2, d \rangle$ und den neuen Pfad $p_3 = \langle o, v_1, v_2, d \rangle$ auf. Es gilt für die entsprechenden Kantenflüsse $f_{e_1} = f_{e_4} = 4$ und $f_{e_2} = f_{e_3} = f_{e_5} = 2$. Die drei Pfade haben jeweils Reisekosten 92 [FH95].

Eine Erweiterung des Straßennetzwerks, die intuitiv als hilfreich angesehen werden kann, kann also zur Verschlechterung der Situation nicht nur eines, sondern aller Verkehrsteilnehmer führen [RT02].

Es wird nun untersucht, ob ein solches Paradoxon auch für Inverse Traffic Assignment auftreten kann. Offensichtlich kann die Erweiterung des Straßennetzwerks dazu führen, dass sich der kürzeste Pfad für ein O-D-Paar s ändert. Das darauf folgende Abweichen von O-D-Paar s (beziehungsweise von dem entsprechenden Verkehrsteilnehmer) vom bisherigen Equilibriumspfad p kann wiederum die Kosten der Equilibriumspfade anderer O-D-Paare erhöhen, wenn Teilpfade dieser auf Pfad p liegen. Für diese O-D-Paare könnten dadurch

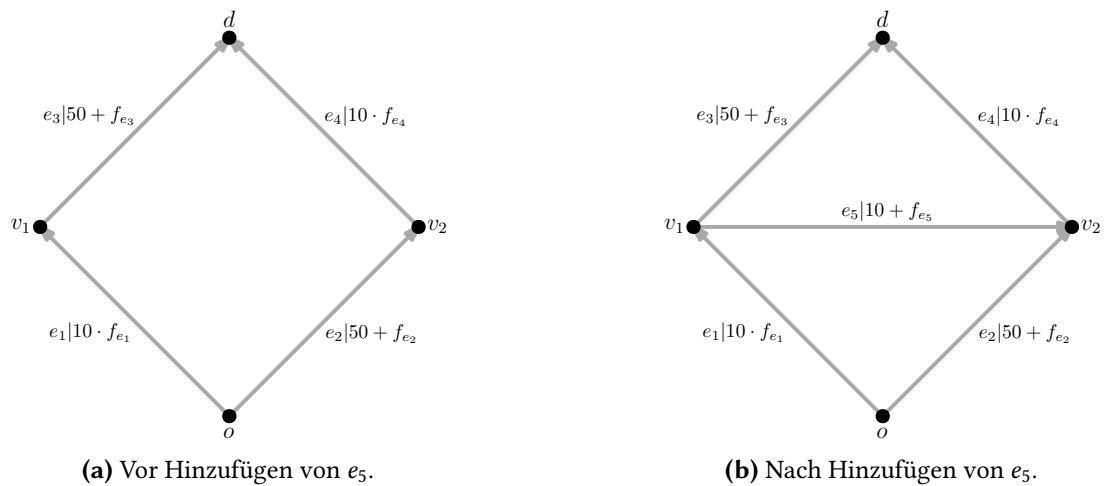


Abbildung 4.6: Das Braess Netzwerk [Bra68]. Die Kanten sind beschriftet nach der Notation *Bezeichnung | Kostenfunktion*.

wiederum kostengünstigere Pfade gefunden werden, die sie verbinden. Ein Anreiz, von einem bisherigen kürzesten Pfad abzuweichen, kann also weitere solcher Anreize für andere O-D-Paare schaffen.

Durch solche Folgen von Abweichungen kann auch für fallende Kostenfunktionen ein Nutzer-Equilibrium entstehen, in dem der kürzeste Pfad für jedes O-D-Paar höhere Kosten als vor der Erweiterung hat. Intuitiv kann dieser Umstand anhand der folgenden Beobachtung erklärt werden: Kooperation auf einem Pfad (also geteilte Nutzung des Pfads durch mehrere O-D-Paare) verringert die Pfadkosten. Wenn ein O-D-Paar von einem Pfad abweicht und dadurch weitere O-D-Paare abweichen, lösen sich Kooperationen im Graphen auf. Die Folge können erhöhte Kosten für alle sein, wenn sich jedes O-D-Paar mit einer zweitbesten Route ohne Kooperation abfinden muss.

Im Folgenden wird eine solche Kette von Abweichungen anhand eines Beispielgraphen demonstriert und das folgende Theorem gezeigt.

Theorem 4.1 (Braess Paradoxon für ITA): *Für monoton fallende Kantenkosten bei Inverse Traffic Assignment kann die Erweiterung des Straßennetzwerks zu höheren Pfadkosten zwischen jedem O-D-Paar in jedem Nutzer-Equilibrium führen.*

Beweis. In Abbildung 4.7 sind ein Graph und drei O-D-Paare vor und nach einer Erweiterung der Kantenmenge zu sehen. Der Graph weist für alle drei O-D-Paare $s_1 = (o_1, d_1)$, $s_2 = (o_2, d_2)$ und $s_3 = (o_3, d_3)$ vor der Erweiterung nur einen Pfad auf, der das jeweilige O-D-Paar verbindet (siehe Abbildung 4.7a). Das eindeutige Nutzer-Equilibrium ist also gegeben durch die Zuordnung der O-D-Paare zu diesen eindeutigen Pfaden. Die O-D-Paare s_1 und s_2 kooperieren auf dem Teilpfad $\langle v_{12}, \dots, v_{22} \rangle$. Die O-D-Paare s_2 und s_3 kooperieren auf dem Teilpfad $\langle v_3, \dots, v_{11} \rangle$.

Die Gewichtsfunktion sei für jede Kante e gegeben durch

$$c_e : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}, c_e(f_e) = d_e - f_e.$$

Demnach liegen im Nutzer-Equilibrium vor der Erweiterung für O-D-Paar s_1 Pfadkosten 29 vor, für O-D-Paar s_2 Pfadkosten 48 und für O-D-Paar s_3 Pfadkosten 22.

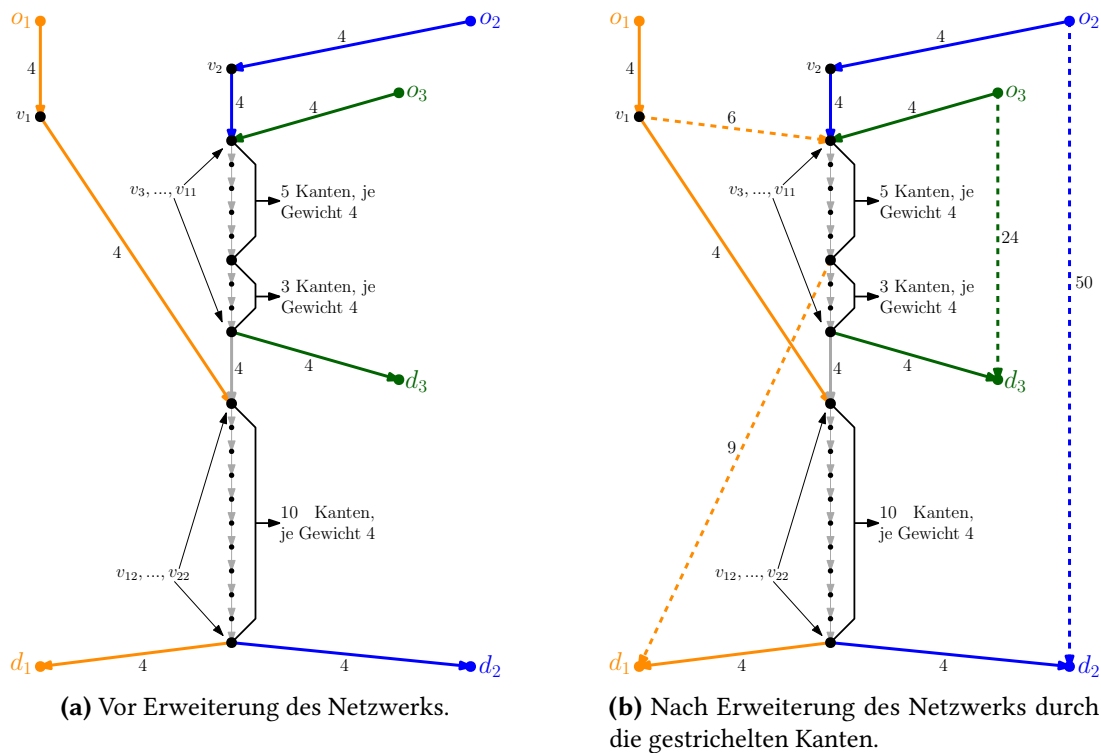


Abbildung 4.7: Netzwerk und dessen Erweiterung, die zur Erhöhung der Pfadkosten aller O-D-Paare im Nutzer-Equilibrium führt. Die Kanten sind mit dem jeweiligen Free-Flow-Gewicht d_e annotiert. Die Kantenkosten sind jeweils gegeben durch $d_e - f_e$ für Kantenfluss f_e . Kanten, die ausschließlich auf Pfaden liegen, die nur ein O-D-Paar verbinden, sind für s_1 orange, für s_2 blau und für s_3 grün gefärbt.

Die Erweiterung des Netzwerks ist in Abbildung 4.7b zu sehen. Neue Kanten sind gestrichelt dargestellt. Der Graph wurde um 5 Kanten, statt wie das Braess Netzwerk um eine Kante, erweitert. Dies begründet die allgemeine Formulierung einer Erweiterung in Theorem 4.1, statt explizit das Hinzufügen einer einzigen Kante zu fordern.

Es existieren jetzt drei Pfade, die O-D-Paar s_1 verbinden:

- 1 Pfad $p_{1,1} = \langle o_1, v_1, v_8, \dots, v_{16}, d_1 \rangle$ - der Equilibriumspfad vor der Erweiterung.
- 2 Pfad $p_{1,2} = \langle o_1, v_1, v_3, \dots, v_8, d_1 \rangle$
- 3 Pfad $p_{1,3} = \langle o_1, v_1, v_3, \dots, v_{11}, v_{12}, \dots, v_{22}, d_1 \rangle$.

Unabhängig davon, welchen Pfad die anderen O-D-Paare wählt, hat Pfad $p_{1,3}$ höhere Gesamtkosten als die Pfade $p_{1,1}$ und $p_{1,2}$. Der Pfad $p_{1,3}$ muss also bei der Untersuchung eines neuen Equilibriums nicht betrachtet werden, da das O-D-Paar s_1 in jeder Situation einen Anreiz hat, von ihm abzuweichen. Es existieren zwei Pfade, die O-D-Paar s_2 verbinden:

- 1 Pfad $p_{2,1} = \langle o_2, v_2, v_3, \dots, v_{11}, v_{12}, \dots, v_{22}, d_2 \rangle$ - der Equilibriumspfad vor der Erweiterung.
- 2 Pfad $p_{2,2} = \langle o_2, d_2 \rangle$

Es existieren zwei Pfade, die O-D-Paar s_3 verbinden:

Tabelle 4.1: Jede Zeile gibt für die Zuordnung der O-D-Paare s_1, s_2, s_3 zu den Pfaden $p_{1,i}, p_{2,j}, p_{3,k}$ die dadurch entstehenden Reisekosten $c(p_{1,i}), c(p_{2,j}), c(p_{3,k})$ zwischen den O-D-Paaren nach der Erweiterung des Graphen in Abbildung 4.6 an. Der Wert $c(p)$ beschreibt jeweils die Gesamtkosten des Pfades p .

Pfade	Kosten	Abweichendes O-D-Paar	Günstigerer Pfad
$p_{1,1}, p_{2,1}, p_{3,1}$	29, 48, 22	s_1	$c(p_{1,2}) = 28$
$p_{1,1}, p_{2,1}, p_{3,2}$	29, 56, 23	s_2	$c(p_{2,2}) = 50$
$p_{1,1}, p_{2,2}, p_{3,1}$	39, 49, 30	s_3	$c(p_{3,2}) = 24$
$p_{1,1}, p_{2,2}, p_{3,2}$	39, 49, 23	s_1	$c(p_{1,2}) = 38$
$p_{1,2}, p_{2,1}, p_{3,1}$	21, 53, 17	s_2	$c(p_{2,2}) = 50$
$p_{1,2}, p_{2,1}, p_{3,2}$	26, 61, 23	s_2	$c(p_{2,2}) = 50$
$p_{1,2}, p_{2,2}, p_{3,1}$	26, 49, 25	s_3	$c(p_{3,2}) = 24$
$p_{1,2}, p_{2,2}, p_{3,2}$	31, 49, 23	-	-

1 Pfad $p_{3,1} = \langle o_3, v_3, \dots, v_{11}, d_2 \rangle$ - der Equilibriumpfad vor der Erweiterung.

2 Pfad $p_{3,2} = \langle o_3, d_3 \rangle$

Ausgehend vom gefundenen Equilibrium berechnet das ITA-Verfahren nach der Erweiterung in 3 Iterationen ein neues Nutzer-Equilibrium. In der ersten der drei Iterationen wechselt durch die Erweiterung der kürzeste Pfad von O-D-Paar s_1 von Pfad $p_{1,1}$ mit Kosten 29 zu Pfad $p_{1,2}$ mit Kosten 28. In der zweiten Iteration wechselt dadurch der kürzeste Pfad von O-D-Paar s_2 von Pfad $p_{2,1}$ mit neuen Kosten 53 zu Pfad $p_{2,2}$ mit Kosten 50. In der dritten Iteration wechselt der kürzeste Pfad für O-D-Paar s_3 von Pfad $p_{3,1}$ mit neuen Kosten 25 zu Pfad $p_{3,2}$ mit Kosten 24.

Im neuen Equilibrium liegen für O-D-Paar s_1 Pfadkosten 31, für O-D-Paar s_2 Pfadkosten 49 und für O-D-Paar s_3 Pfadkosten 23 vor. Dies stellt höhere Reisekosten für alle Verkehrsteilnehmer dar.

Das beschriebene Nutzer-Equilibrium nach der Erweiterung wird nicht nur durch das ITA-Verfahren ausgehend vom vorherigen Equilibrium erreicht, sondern ist das eindeutige Nutzer-Equilibrium für den erweiterten Graphen. Dies geht aus Tabelle 4.1 hervor, die für jeden möglichen Pfadzustand beschreibt, ob und welches O-D-Paar *nicht* dem passenden kürzesten Pfad zugeordnet ist.

Da vor und nach der Erweiterung des Graphen jeweils ein eindeutiges Nutzer-Equilibrium vorliegt, folgt aus den nach der Erweiterung höheren Pfadkosten im Nutzer-Equilibrium für jedes O-D-Paar die Behauptung aus Theorem 4.1. ■

5 Konvergenz des ITA-Verfahrens

In diesem Kapitel wird das ITA-Verfahren genauer untersucht und in Bezug auf das Konvergenzverhalten analysiert. Wie in Abschnitt 4.2 angesprochen, simuliert das ITA-Verfahren den Prozess der wiederholten Wahl einer jeweils kürzesten Route für jeden Verkehrsteilnehmer, welcher genau dann einen stabilen Zustand erreicht, wenn ein Nutzer-Equilibrium für die aktuellen Routenwahlen vorliegt.

Das Ziel dieses Kapitels ist es, zu beweisen, dass der Einsatz des ITA-Verfahrens auch immer zu einem solchen stabilen Zustand führt. Genauer soll also die folgende Vermutung bewiesen werden:

Conjecture 5.1 (Konvergenz des ITA-Verfahrens): *Das ITA-Verfahren konvergiert für beliebige Eingabegraphen, beliebige Mengen von O-D-Paaren und monoton fallende Gewichtsfunktionen und liefert ein Nutzer-Equilibrium.*

In Abschnitt 5.1 wird gezeigt, dass die Kantenflüsse in einem Nutzer-Equilibrium für die in dieser Arbeit getroffenen Annahmen immer ganzzahlig sind, sodass die Ganzzahligkeit der vom ITA-Verfahren gefundenen Verkehrsflüsse keine Einschränkung darstellt. Abschnitt 5.2 untersucht die Änderungen in den Zuordnungen von O-D-Paaren zu kürzesten Pfaden in den Iterationen des ITA-Verfahrens. Das Ziel ist, auszuschließen, dass sich eine solche Zuordnung einer Iteration in einer späteren Iteration wiederholt, um die Konvergenz-Vermutung 5.1 zu beweisen. Es wird gezeigt, dass sich eine Zuordnung nie bereits nach zwei Iterationen wiederholen kann. Weiter werden mögliche Ansätze vorgestellt, die das Ziel haben, diesen Beweis auf Wiederholungen nach beliebig vielen Iterationen auszuweiten. Abschnitt 5.3 behandelt andere Ansätze für den Beweis der Konvergenz des ITA-Verfahrens.

5.1 Ganzzahligkeit der Nutzer-Equilibria

Das ITA-Verfahren führt in jeder Iteration AON durch und ordnet dadurch stets alle Verkehrsteilnehmer mit dem gleichen Start- und Zielknoten dem gleichen kürzesten Pfad zu. Insbesondere sind die Zwischenlösungen in jeder Iteration und die Lösung nach Konvergenz des Verfahrens ganzzahlig. Das heißt, der Fluss von keinem O-D-Paar wird auf mehr als einen Pfad zwischen dem entsprechenden Start- und Zielknoten aufgeteilt.

Für die RTA-Lösungsalgorithmen wie der Frank-Wolfe-Algorithmus, die Beckmanns Transformation lösen, wird Fluss im Allgemeinen als kontinuierliche Variable aufgefasst [She85 | Ros73]. Dass es für fallende Kantenkosten aber ausschließlich ganzzahlige Nutzer-Equilibria gibt, soll nun gezeigt werden.

Lemma 5.2: *Für monoton fallende Kostenfunktionen und Eindeutigkeit eines kürzesten Pfades ist ein Nutzer-Equilibrium stets ein ganzzahlige, eindeutige Zuordnung von O-D-Paaren zu kürzesten Pfaden.*

Beweis. Das Lemma kann durch einen Widerspruchsbeweis gezeigt werden. Angenommen also, ein Nutzer-Equilibrium liegt als Verkehrsfluss f vor, in dem die Verkehrsnachfrage zwischen einem O-D-Paar $s = (o, d) \in S$ auf mehr als einen Pfad zwischen Ursprung o und Ziel d aufgeteilt ist.

Unter den Annahmen über die Routenwahl aus Abschnitt 3.1 existiert, auch bei Kostengleichheit verschiedener günstigster Pfade, ein eindeutiger kürzester Pfad p zwischen dem O-D-Paar s . Es folgt sofort, dass es für die individuelle Minimierung der Reisekosten zwischen O-D-Paar s vorteilhaft ist, die gesamte Verkehrsnachfrage auf diesen für den vorliegenden Verkehrsfluss f eindeutigen kürzesten Pfad p zu leiten. ■

Bei *streng* monoton fallenden Kantenkosten führt jede Erhöhung des Pfadflusses zu einer Reduzierung der Reisekosten auf dem entsprechenden Pfad. Das im Beweis beschriebene individuelle Abweichen eines O-D-Paares s zu einem einzigen, eindeutig kürzesten Pfad führt dann auch bei vorheriger Kostengleichheit der befahrenen Pfade zu einer echten Reduzierung der Reisekosten zwischen dem O-D-Paar s . Dass solche Kostenreduzierungen nach der Definition eines Nutzer-Equilibriums aus Abschnitt 4.1 sonst nicht bei der Routenwahl antizipiert werden, motiviert die Annahme der Eindeutigkeit eines kürzesten Pfades.

Es kann weiter beobachtet werden, dass ein Pfadzustand, der zwei Elemente $s, s' \in S$ mit $s = s'$ (beachte, dass S als Multimenge aufgefasst wird), verschiedenen Pfaden $p, p' \in P_s$ mit $p \neq p'$ zuordnet, ebenfalls kein Nutzer-Equilibrium darstellen kann. Mindestens eines der Elemente s, s' ist für den Pfadzustand dann nicht dem eindeutig kürzesten Pfad zwischen den entsprechenden Start- und Zielknoten zugeordnet.

5.2 Oszillationen im ITA-Verfahren

In diesem Abschnitt wird untersucht, ob sich die Routenwahl aller O-D-Paare einer Iteration in einer späteren Iteration wiederholen kann. Das Ziel dabei ist, solche *Oszillationen* der Routenwahlen auszuschließen und dadurch zu zeigen, dass nach einer endlichen Anzahl an Iterationen zwingend ein Nutzer-Equilibrium erreicht wird.

Nach der in Kapitel 3 eingeführten Notation sei $S = \{(o_1, d_1), \dots, (o_k, d_k)\}$ die Multimenge aller O-D-Paare und es sei weiter P die Menge aller einfachen Pfade, die für mindestens ein Element $s = (o, d) \in S$ die Knoten $o \in V$ und $d \in V$ im Straßennetzwerkgraphen $G = (V, E)$ verbinden. Der kürzeste Pfad, der O-D-Paar s in einer Iteration i des ITA-Verfahrens verbindet (also der kürzeste Pfad gemäß Gewichtsfunktion c_i), sei als $p_i(s)$ bezeichnet. Unabhängig von der Kostenfunktion c_i wird hierbei nach Kapitel 3 angenommen, dass für alle O-D-Paare $s \in S$ der kürzeste Pfad $p_i(s)$ jeweils eindeutig ist. Der Pfadzustand $Z_i = (p_i(s_1), p_i(s_2), \dots, p_i(s_{|S|})) \in P^{|S|}$ beschreibt also die eindeutige Zuordnung von O-D-Paaren zu kürzesten Pfaden, die sie verbinden.

Da S eine Multimenge ist, wird für jedes betrachtete O-D-Paar in jeder Iteration des ITA-Verfahrens dem entsprechenden kürzesten Pfad genau Fluss mit Wert 1 zugewiesen. Um nicht nur diese 1-zu-1-Zuordnung von O-D-Paaren zu Fluss, sondern auch eine 1-zu-1-Zuordnung zwischen O-D-Paaren und Kostenänderungen zu erhalten, wird die folgende vereinfachende Annahme getroffen.

Lineare Kostenfunktionen Im Folgenden wird vereinfachend angenommen, dass die Gewichtsfunktion $c_e : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ für jede Kante e in G das Free-Flow-Gewicht d_e linear abhängig von dem Kantenfluss reduziert. Sei also f_e^i der Fluss auf Kante e in Iteration i . Dann ist

$$c_e(f_e^i) = \begin{cases} d_e - \alpha \cdot f_e^i, & \text{falls } f_e^i < \frac{d_e}{\alpha_e} \text{ für ein } \alpha \in \mathbb{R}_+ \text{ und für alle } e \in E. \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

Weiter wird vereinfachend $\alpha = 1$ gesetzt und angenommen, dass der Flusswert einer Kante nie das Free-Flow-Gewicht überschreitet. Das heißt, ein zusätzlicher Verkehrsteilnehmer (beziehungsweise O-D-Paar), der über eine Kante fährt, verringert die Kosten dieser Kante immer um genau 1.

Die Menge der Kanten E in Graph G und die Menge der O-D-Paare S sind endlich. Demnach ist auch die Menge P der einfachen Pfade, die O-D-Paare aus der Menge S über Kanten aus der Menge E verbinden, endlich.

Insgesamt folgt, dass auch die Menge aller Pfadzustände, die angenommen werden können, endlich ist. Konvergiert das ITA-Verfahren nicht nach einer hinreichend großen Anzahl an Iterationen, muss sich der Pfadzustand einer Iteration also in einer späteren Iteration wiederholen. Seien für einen solchen Fall sich wiederholender Pfadzustände also $i, j \in \mathbb{N}$ kleinstmöglich mit $i < j$ und gleichem Pfadzustand $Z_i = Z_j$. Gilt $|i - j| = 1$, so ist das Konvergenzkriterium erfüllt und das Verfahren hat ein Nutzer-Equilibrium gefunden. Gilt $|i - j| > 1$, also $Z_i = Z_{i+k}$ für ein $k \in \mathbb{N}$ mit $k > 1$, so wiederholt sich jeder Pfadzustand nach Iteration i jeweils nach k Iterationen. Dies liegt daran, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ der Pfadzustand Z_n eindeutig die Kantenflüsse zu Beginn von Iteration $n+1$ bestimmt. Diese bestimmen eindeutige neue Kantengewichte und damit eindeutig den Pfadzustand Z_{n+1} .

Eine solche Situation sich wiederholender Pfadzustände in nicht direkt aufeinanderfolgenden Iterationen wird als eine *Oszillation* in k Iterationen bezeichnet und wird durch $O = (i, k)$ beschrieben. Aus obigen Beobachtungen kann gefolgert werden, dass das ITA-Verfahren genau dann konvergiert, wenn keine Oszillation der Pfadzustände auftritt. Um die Konvergenz des Verfahrens zu beweisen, reicht es also zu zeigen, dass für allgemeine Graphen, beliebige Mengen von O-D-Paaren und monoton im Kantenfluss fallende Gewichtsfunktionen keine Oszillationen auftreten können. Um diesen Beweis zu führen, werden im Folgenden die Gründe für Unterschiede in den Pfadzuständen aufeinanderfolgender Iterationen betrachtet.

5.2.1 Wechsel der kürzesten O-D-Pfade

In diesem Abschnitt werden die Umstände untersucht, die zu einem Wechsel der Pfadzustände zwischen zwei Iterationen führen. Um Oszillationen auszuschließen, muss gezeigt werden, dass diese Wechsel nie zurück zu einem alten Zustand führen.

Gilt für eine Iteration $i \in \mathbb{N}$ und den entsprechenden Pfadzustand $Z_i \neq Z_{i+1}$, so hat sich der kürzeste Pfad für mindestens ein O-D-Paar $s \in S$ in Iteration $i + 1$ geändert. Es gilt für ein solches O-D-Paar s also $p_i(s) \neq p_{i+1}(s)$. Mit $c_i(p) = \sum_{e \in p} c_e(f_e^i)$ als Gesamtkosten eines Pfades $p \in P$ ist also

$$c_i(p_i(s)) \leq c_i(p_{i+1}(s)) \text{ und } c_{i+1}(p_i(s)) > c_{i+1}(p_{i+1}(s))$$

oder

$$c_i(p_i(s)) < c_i(p_{i+1}(s)) \text{ und } c_{i+1}(p_i(s)) \geq c_{i+1}(p_{i+1}(s)).$$

Wegen der Eindeutigkeit des kürzesten Pfades findet nur dann ein Wechsel des kürzesten Pfades statt, wenn Ungleichheit der Kosten der Pfade $p_i(s)$ und $p_{i+1}(s)$ in mindestens einer der Iterationen i und $i + 1$ gilt.

In jeder Iteration des ITA-Verfahrens werden zuerst die Kantengewichte neu berechnet und danach die neuen kürzesten Pfade berechnet. Es werden also die Kantengewichte c_{i+1} auf Basis des Pfadzustands Z_i und den eindeutig dadurch bestimmten Kantenflüssen berechnet. Der Wechsel des kürzesten Pfades von Pfad $p_i(s)$ zu Pfad $p_{i+1}(s)$ wird also herbeigeführt durch Änderungen der Kantenflüsse auf den Pfaden $p_i(s)$ und $p_{i+1}(s)$ in Iteration i (verglichen mit den Kantenflüssen aus Iteration $i - 1$). Dies können Verringerungen der Kantenflüsse auf Pfad $p_i(s)$ (und damit eine Erhöhung der Kosten von Pfad $p_i(s)$ in Iteration $i + 1$) oder eine Erhöhung der Kantenflüsse auf Pfad $p_{i+1}(s)$ (und damit eine Verringerung der Kosten von Pfad $p_{i+1}(s)$) sein.

Es ist hier jedoch zu beachten, dass sich die Kantenflüsse auf Pfad $p_i(s)$ in Iteration i auch erhöhen können und dadurch eine Verringerung der Kosten von Pfad $p_i(s)$ in Iteration $i + 1$ eintreten kann. Verringern sich die Kosten von Pfad $p_{i+1}(s)$ stark genug, insbesondere stärker als die Kosten von Pfad $p_i(s)$, so kann auch dann der Wechsel des kürzesten Pfades erfolgen. Auch können sich die Kosten von Pfad $p_{i+1}(s)$ in Iteration $i + 1$ durch Verringerung der Kantenflüsse in Iteration i erhöhen. Erhöhen sich die Kosten von Pfad $p_i(s)$ stärker (und bleiben alle anderen Pfade, die O-D-Paar s verbinden, ebenfalls teurer), so kann dennoch Pfad $p_{i+1}(s)$ der kürzeste Pfad in Iteration $i + 1$ sein.

Änderungen der Kantenflüsse auf einem Pfad p , der ein O-D-Paar s verbindet, werden stets durch Wechsel der kürzesten Pfade von anderen O-D-Paaren ausgelöst. Wechselt der kürzeste Pfad von O-D-Paar s' von Pfad p'_1 zu Pfad p'_2 , so wählt das O-D-Paar s' in der entsprechenden Iteration den Pfad p'_2 und bewirkt damit, isoliert betrachtet, eine Erhöhung der Kosten von Pfad p'_1 und eine Verringerung der Kosten von Pfad p'_2 . Gilt für einen dritten Pfad $p \in P$ nun $p \cap p'_1 \neq \emptyset$ ($p \cap p'_1$ sind genau die Kanten, die sowohl auf Pfad p als auch auf Pfad p'_1 liegen), so bewirkt der Wechsel auch eine Erhöhung der Kosten von Pfad p . Gilt $p \cap p'_2 \neq \emptyset$, so entsteht analog eine Verringerung der Kosten von Pfad p .

Diese *Bewegungen* der O-D-Paare im Graphen von einem günstigsten Pfad zum nächsten und die damit verbundenen Wechselwirkungen zwischen den O-D-Paaren werden im Folgenden genauer untersucht.

Definition 5.3 (Bewegung): Eine Bewegung $b = (s, i, p, p')$ sei der Wechsel des kürzesten Pfades für O-D-Paar s von Pfad p zu Pfad p' in Iteration i . Es gilt dabei stets $p \neq p'$ und

$$c_i(p') \left\{ \begin{array}{l} < \\ \leq \end{array} \right\} c_i(p) \left\{ \begin{array}{l} \text{falls } c_{i-1}(p') = c_{i-1}(p) \\ \text{sonst, also falls } c_{i-1}(p') > c_{i-1}(p) \end{array} \right\}. \quad (5.1)$$

Pfad p sei bezeichnet als Ursprungspfad von Bewegung b , Pfad p' als der Zielpfad. Die Menge B_i sei die Menge aller Bewegungen in einer Iteration i .

Beachte, dass für eine Bewegung $b = (s, i, p, p')$ nicht nur Ungleichung 5.1 erfüllt ist und damit Pfad p' höchstens so hohe Reisekosten wie Pfad p aufweist, sondern Pfad p' in Iteration i sogar der kostengünstigste Pfad unter allen Pfaden ist, die das O-D-Paar s verbinden.

Folgende Bezeichnungen sind für die weiteren Beschreibungen zusätzlich wichtig: Liegt eine Kante $e \in E$ auf dem Ursprungspfad p , so *verlässt* die Bewegung b die Kante e . Liegt Kante $e \in E$ auf dem Zielpfad p' , so *betrifft* die Bewegung b die Kante e . Für eine Bewegung $b = (s, i, p, p')$ schreibe auch: *O-D-Paar s bewegt sich in Iteration i von Pfad p zu Pfad p'* .

Die Bewegung $b = (s, i, p, p')$ wird durch erhöhte Kosten von Ursprungspfad p und / oder verringerte Kosten von Zielpfad p' in Iteration i gegenüber den Kosten in Iteration $i - 1$ ausgelöst. Diese Kostenänderungen können für $i \geq 2$ nur durch Bewegungen anderer O-D-Paare in Iteration $i - 1$ (und früheren Iterationen) bewirkt worden sein. Eine vorherige Bewegung von s selbst hat nämlich immer einen dämpfenden Effekt auf die für eine Bewegung $b = (s, i, p, p')$ nötigen Kostenänderungen:

Wenn sich das O-D-Paar s zuletzt in Iteration $i - l$ bewegt hat für ein $l \in \mathbb{N}$, dann ist diese Bewegung gegeben durch $b' = (s, i - l, p'', p)$ für einen dritten Pfad p'' . Dann hat O-D-Paar s , isoliert betrachtet, die Kosten von Ursprungspfad p verringert und im Fall von $p'' = p'$ sogar die Kosten von Zielpfad p' erhöht.

Mit Bewegungen können die O-D-Paare also Einfluss auf die Kosten kürzester Pfade anderer O-D-Paare ausüben. Und mit Ausnahme der ersten Iteration - in der alle Bewegungen aufgrund der Free-Flow-Zuordnung geschehen und ihren Free-Flow-Pfad als Ursprungspfad haben - wird jede Bewegung eines O-D-Paars durch Bewegungen anderer O-D-Paare herbeigeführt.

5.2.2 Direkte Oszillationen

Bei der Untersuchung von Oszillationen sind besondere Wechselwirkungen zwischen Bewegungen wichtig, die zu einer Rückkehr zu einem alten Pfadzustand führen. Auf welche Weise die Bewegungen Einfluss aufeinander nehmen, wird besonders deutlich für Oszillationen in zwei Iterationen. Solche Oszillationen seien bezeichnet als *Direkte Oszillationen*. Eine Direkte Oszillation beschreibt also die Situation, dass für ein $i \in \mathbb{N}$ gilt: $Z_i = Z_{i+2}$.

Im folgenden wird bewiesen, dass eine Direkte Oszillation nicht auftreten kann, also:

Theorem 5.4 (Nicht-Existenz von Direkten Oszillationen für lineare Kantenkosten): *Für beliebige Eingabegraphen $G = (V, E)$, beliebige O-D-Paare und Kostenfunktionen*

$$c_e(f_e^i) = d_e - f_e^i \text{ für alle } e \in E \quad (5.2)$$

können bei der Durchführung des ITA-Verfahrens keine Direkten Oszillationen auftreten.

Beweis. Es wird ein Widerspruchsbeweis geführt. Es sei also ein Straßengraph $G = (V, E)$ und eine Multimenge an O-D-Paaren S gegeben. Weiter sei die Kostenfunktion für jede Kante $e \in E$ durch Gleichung 5.2 gegeben, wie es vereinfachend in diesem Abschnitt definiert ist. Es wird nun angenommen, dass bei der Ausführung des ITA-Verfahrens für diese Eingaben eine Direkte Oszillation $O = (i, 2)$ für eine kleinstmögliche Iteration $i \in \mathbb{N}$ auftritt.

Unter der Annahme der Direkten Oszillation gibt es für jede Bewegung $b = (s, i + 1, p, p')$ auch eine Bewegung $b' = (s, i + 2, p', p)$. Alle Bewegungen in Iteration $i + 1$ führen also zu kürzesten Pfaden, die schon in der Folgeriteration nicht mehr die kürzesten Pfade sind. Das motiviert die folgende Definition.

Definition 5.5 (Falsche Bewegung): *Eine Falsche Bewegung ist eine Bewegung $b = (s, i, p, p')$ in einer Iteration i , für die eine Bewegung $b' = (s, i + 1, p', p)$ existiert.*

Für eine Direkte Oszillation $O = (i, 2)$ sind also in Iteration $i + 1$ alle Bewegungen Falsche Bewegungen. Im Folgenden wird die Menge dieser Bewegungen B_{i+1} genauer untersucht.

Für eine Falsche Bewegung $b = (s, i + 1, p, p')$ von O-D-Paar $s = (o, d)$ muss es andere Bewegungen (in der gleichen Iteration $i + 1$) geben, die die Rückbewegung $b' = (s, i + 2, p', p)$ auslösen. Diese anderen Bewegungen führen den Wechsel des zwischen O-D-Paar s kürzesten Pfades von Pfad p' zurück zu Pfad p in Iteration $i + 2$ herbei.

Die Bewegung $b = (s, i + 1, p, p')$, isoliert betrachtet, verringert die Kosten von Pfad p' um 1 und erhöht die Kosten von Pfad p um 1. Jedes andere Element $s' \in S$ mit gleichem Start- und Zielpunkt wie Element s hat durch eine äquivalente Bewegung $b = (s', i + 1, p, p')$ die gleichen Auswirkungen auf die Kosten der Pfade p und p' . Dennoch liegt nach Iteration $i + 1$ Fluss auf den Kanten vor, der $c_{i+2}(p) \leq c_{i+2}(p')$ bedingt (beziehungsweise sogar $c_{i+2}(p) < c_{i+2}(p')$, falls $c_{i+1}(p) = c_{i+1}(p')$, vergleiche Ungleichung 5.1).

Um die Kostenänderungen auf den Pfaden p und p' für eine Falsche Bewegung $b = (s, i + 1, p, p')$ zu untersuchen, können die Mengen E_p und $E_{p'}$ aller Kanten auf dem Ursprungspfad p und dem Zielpfad p' untersucht werden. Betrachte beispielsweise eine Kante $e \in E_p$ mit $f_e^{i+2} > f_e^{i+1}$. Die Kosten der Kante e wurden also durch die Bewegungen in Iteration $i + 1$ um $f_e^{i+2} - f_e^{i+1}$ verringert. Sei $A_{e,i+1}$ (A für *arrival*) die Menge der Bewegungen in Iteration $i + 1$ mit einem Zielpfad, auf dem die Kante e liegt. Sei analog $D_{e,i+1}$ (D für *departure*) die Menge der Bewegungen mit einem Ursprungspfad, auf dem die Kante e liegt. Es ist also der Wert $|A_{e,i+1}|$ die Anzahl an Bewegungen, die die Kante e in Iteration $i + 1$ betreten und $|D_{e,i+1}|$ die Anzahl an Bewegungen, die sie verlassen. Dann folgt

$$|A_{e,i+1}| - |D_{e,i+1}| = f_e^{i+2} - f_e^{i+1}.$$

Diese Kostenänderungen als die Differenz zwischen betretenden und verlassenden Bewegungen auf einzelnen Kanten bestimmen die Kostenänderungen von allen Pfaden $p \in P$. Damit können auch alle Entwicklungen beschrieben werden, die eine Direkte Oszillation auslösen. Dies motiviert eine Struktur, die Falsche Bewegungen und zugehörige Kostenänderungen umfasst.

Definition 5.6 (Bewegungsgraph für lineare Kantenkosten): *Der Bewegungsgraph für die Direkte Oszillation $O = (i, 2)$ sei der gerichtete, gewichtete Multigraph $G_O = (V_O, E_O)$ mit zugehöriger Gewichtsfunktion $c_O : E_O \rightarrow \mathbb{N}$. Die Knotenmenge $V_O = B_{i+1} \cup \{x, y\}$ sind die (Falschen) Bewegungen aus Iteration $i + 1$ zusammen mit zwei Knoten x und y . Für eine Kante $e \in E$ des Straßengraphen G existieren nach folgenden Prinzipien Kanten in E_O :*

Fall 1 $|A_{e,i+1}| > |D_{e,i+1}|$: E_O enthält eine Kante $x_{e,b} := (x, b)$ mit Gewicht $c_O(x_{e,b}) = |A_{e,i+1}| - |D_{e,i+1}|$ für alle Bewegungen $b \in A_{e,i+1}$. E_O enthält eine Kante $y_{e,b} := (b, y)$ mit Gewicht $c_O(y_{e,b}) = |A_{e,i+1}| - |D_{e,i+1}|$ für alle Bewegungen $b \in D_{e,i+1}$.

Fall 2 $|A_{e,i+1}| < |D_{e,i+1}|$: E_O enthält eine Kante $x_{e,b} = (x, b)$ mit Gewicht $c_O(x_{e,b}) = |D_{e,i+1}| - |A_{e,i+1}|$ für alle Bewegungen $b \in D_{e,i+1}$. E_O enthält eine Kante $y_{e,b} = (b, y)$ mit Gewicht $c_O(y_{e,b}) = |D_{e,i+1}| - |A_{e,i+1}|$ für alle Bewegungen $b \in A_{e,i+1}$.

Fall 3 $|A_{e,i+1}| = |D_{e,i+1}|$: Für Kante e existieren keine Kanten in E_O .

Im Folgenden seien zur besseren Lesbarkeit die Kanten E des Straßengraphen G als *Straßenkanten* und die Kanten E_O des Bewegungsgraphen als *Bewegungskanten* bezeichnet. Eine Bewegung $b = (s, i + 1, p, p')$ hat also eine eingehende Bewegungskante $x_{e,b}$, wenn:

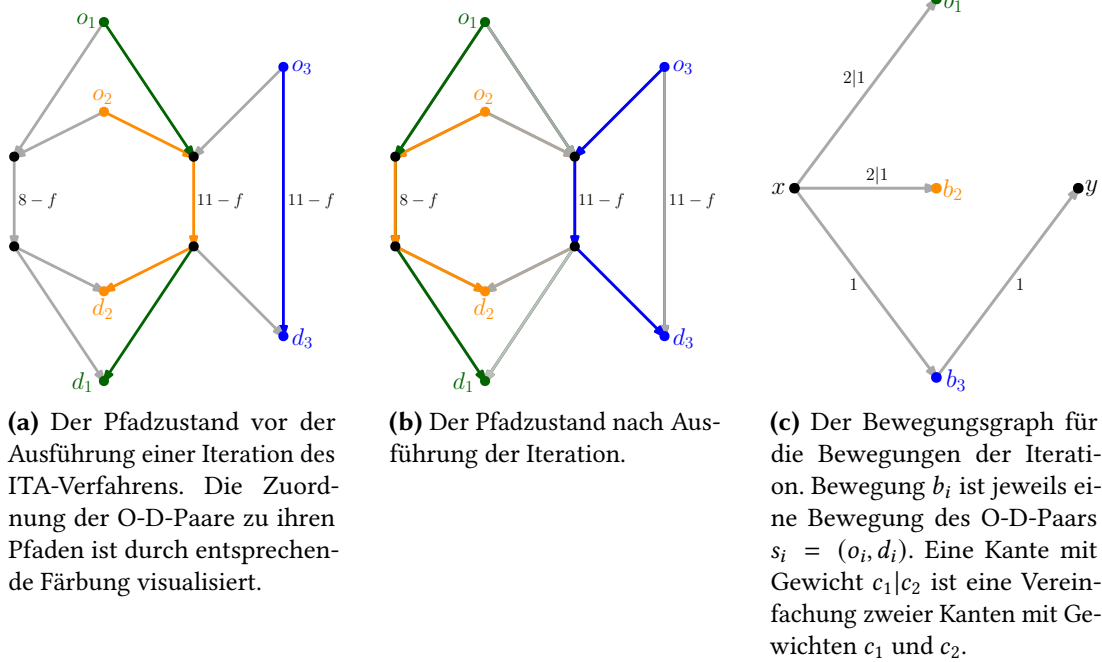


Abbildung 5.1: Die Änderung des Pfadzustandes durch Ausführung einer Iteration des ITA-Verfahrens auf einem Straßengraphen mit 3 O-D-Paaren und der entsprechende Bewegungsgraph für diese Iteration. Kanten ohne Beschriftung haben als Vereinfachung konstant Gewicht 0, sodass Flussänderungen auf diesen Kanten keine Auswirkungen auf den Bewegungsgraphen haben.

- $e \in E_p$ und $f_e^{i+2} < f_e^{i+1}$. In Iteration $i+1$ wurde die Straßenkante e also häufiger verlassen als betreten und Bewegung b verlässt die Kante e .
- $e \in E_{p'}$ und $f_e^{i+2} > f_e^{i+1}$. In Iteration $i+1$ wurde die Straßenkante e also häufiger betreten als verlassen und Bewegung b betritt die Kante e .

Eine Bewegung $b = (s, i + 1, p, p')$ hat eine ausgehende Bewegungskante $y_{e,b}$, wenn:

- $e \in E_p$ und $f_e^{i+2} > f_e^{i+1}$. In Iteration $i + 1$ wurde die Straßenkante e also häufiger betreten als verlassen und Bewegung b verlässt die Kante e .
- $e \in E_{p'}$ und $f_e^{i+2} < f_e^{i+1}$. In Iteration $i + 1$ wurde die Straßenkante e also häufiger verlassen als betreten und Bewegung b betritt die Kante e .

Ein Beispiel für die Konstruktion des Bewegungsgraphen ist in Abbildung 5.1 zu sehen. Die Abbildungen 5.1a und 5.1b zeigen einen Straßengraphen mit 3 O-D-Paaren, für die jeweils 2 Pfade zwischen Start- und Zielknoten verfügbar sind. Wird eine Iteration des ITA-Verfahrens für den in Abbildung 5.1a visualisierten Pfadzustand ausgeführt, so entsteht der Pfadzustand in Abbildung 5.1b. Auch ohne, dass eine Direkte Oszillation vorliegt, kann der Bewegungsgraph zu den Bewegungen und den entstehenden Kostenänderungen dieser Iteration konstruiert werden. Er ist in Abbildung 5.1c zu sehen.

Für Bewegung $b = (s, i+1, p, p') \in B_{i+1}$ sei X_b die Menge der eingehenden Bewegungskanten und Y_b die Menge der ausgehenden Bewegungskanten. Also

$$X_b = \{x_{e,b} \in E_O \mid e \in E_p \cup E_{p'}\} \text{ und } Y_b = \{y_{e,b} \in E_O \mid e \in E_p \cup E_{p'}\} .$$

Seien

$$c_O(X_b) = \sum_{x_{e,b} \in X_b} c_O(x_{e,b}) \text{ und analog } c_O(Y_b) = \sum_{y_{e,b} \in Y_b} c_O(y_{e,b})$$

die Gesamtgewichte der ein- beziehungsweise ausgehenden Kanten an der Bewegung b .

Die eingehenden Kanten X_b repräsentieren die Kostenänderungen von Kanten auf Ursprungspfad p , deren Kosten sich erhöht haben und die Kostenänderungen von Kanten auf Zielpfad p' , deren Kosten sich verringert haben. Diese Kostenerhöhungen und -verringierungen betragen insgesamt $c_O(X_b)$. Sie erhöhen, isoliert betrachtet, die in Iteration $i + 1$ positive Kostendifferenz zwischen den Pfaden p und p' und dämpfen den Effekt, der die Rückbewegung $b' = (s, i + 2, p', p)$ auslöst.

Die ausgehenden Kanten Y_b repräsentieren Verringerungen der Kosten von Kanten auf Ursprungspfad p und Erhöhungen der Kosten auf Zielpfad p' um insgesamt $c_O(Y_b)$. Diese Kostenänderungen reduzieren die Kostendifferenz zwischen den Pfaden p und p' und verstärken den Effekt, der die Rückbewegung $b' = (s, i + 2, p', p)$ auslöst.

Diese Beobachtungen können für alle Bewegungen $b \in B_{i+1}$ in der folgenden Gleichung zusammengefasst werden:

$$c_{i+2}(p) - c_{i+2}(p') = c_{i+1}(p) - c_{i+1}(p') + c_O(X_b) - c_O(Y_b) . \quad (5.3)$$

Jede Bewegung $b = (s, i + 1, p, p') \in B_{i+1}$ ist eine falsche Bewegung. Es ist also

$$c_{i+1}(p') < c_{i+1}(p) , \text{ aber } c_{i+2}(p') > c_{i+2}(p) . \quad (5.4)$$

Es ist zu beachten, dass hierbei nach Ungleichung 5.1 nicht strikte Ungleichheit in beiden Ungleichungen gelten muss, aber in mindestens einer. Einfachheitshalber wurde hier jeweils strikte Ungleichheit angenommen. Aus den Ungleichungen 5.4 folgt direkt

$$c_{i+1}(p) - c_{i+1}(p') > 0 \text{ und } c_{i+2}(p) - c_{i+2}(p') < 0 . \quad (5.5)$$

Gilt in einer der Ungleichungen 5.4 Gleichheit, so auch in einer der Ungleichungen 5.5. Die weiteren Folgerungen sind auch dann gültig.

Aus Gleichung 5.3 und Ungleichung 5.5 folgt, dass für alle Bewegungen $b \in B_{i+1}$ die folgende wichtige Ungleichung gelten muss:

$$c_O(X_b) < c_O(Y_b) . \quad (5.6)$$

Die Summe der Gewichte auf ausgehenden Bewegungskanten muss also für jede Bewegung $b = (s, i + 1, p, p')$ in Iteration $i + 1$ größer sein als die Summe der Gewichte auf eingehenden Bewegungskanten.

Es wird nun die gesamte Kantenmenge des Bewegungsgraphen E_O betrachtet. Sei $X := \bigcup_{b \in B_{i+1}} X_b$ die Menge aller an Bewegungen eingehenden Kanten und $Y := \bigcup_{b \in B_{i+1}} Y_b$ die Menge aller an Bewegungen ausgehenden Kanten. Die Gesamtgewichte der Mengen sind gegeben durch

$$c_O(X) = \sum_{b \in B_{i+1}} c_O(X_b) \text{ und } c_O(Y) = \sum_{b \in B_{i+1}} c_O(Y_b).$$

Für jede Straßenkante $e \in E$ sei der Wert $m_{e,x}$ die Summe der Gewichte von Bewegungskanten, die eingehend an Bewegungen sind und Kostenänderungen der Straßenkante e entsprechen. Analog sei $m_{e,y}$ die Summe der Gewichte von ausgehenden Bewegungskanten für diese Kostenänderungen, also

$$m_{e,x} = \sum_{x_{e,b} \in X} c_O(x_{e,b}) \text{ und } m_{e,y} = \sum_{y_{e,b} \in Y} c_O(y_{e,b}).$$

Dann gilt für jede Straßenkante $e \in E$ nach Definition 5.6 Folgendes:

Fall 1 $|A_{e,i+1}| > |D_{e,i+1}|$: Zu Straßenkante e existieren eingehende Bewegungskanten mit Gesamtgewicht $m_{e,x} = |A_{e,i+1}| \cdot (|A_{e,i+1}| - |D_{e,i+1}|)$ in Menge X . Sie sind eingehende Kanten an den Bewegungen, die Kante e betreten. Es existieren ausgehende Bewegungskanten mit Gesamtgewicht $m_{e,y} = |D_{e,i+1}| \cdot (|A_{e,i+1}| - |D_{e,i+1}|)$ in Menge Y . Sie sind ausgehende Kanten an den Bewegungen, die die Straßenkante e verlassen. Offensichtlich gilt $m_{e,x} > m_{e,y}$.

Fall 2 $|A_{e,i+1}| < |D_{e,i+1}|$: Es ist $m_{e,x} = |D_{e,i+1}| \cdot (|D_{e,i+1}| - |A_{e,i+1}|)$ und $m_{e,y} = |A_{e,i+1}| \cdot (|D_{e,i+1}| - |A_{e,i+1}|)$ und wieder gilt offensichtlich $m_{e,x} > m_{e,y}$.

Fall 3 $|A_{e,i+1}| = |D_{e,i+1}|$: Kante e hat keinen Einfluss auf X und Y .

Es gilt $|A_{e,i+1}| \neq |D_{e,i+1}|$ für mindestens eine Straßenkante $e \in E$. Wäre nämlich $|A_{e,i+1}| = |D_{e,i+1}|$ für alle Straßenkanten $e \in E$, so ändert sich der Verkehrsfluss in Iteration $i + 1$ nicht und das Verfahren konvergiert. Insgesamt folgt sofort

$$c_O(X) = \sum_{e \in E} m_{e,x} > \sum_{e \in E} m_{e,y} = c_O(Y). \quad (5.7)$$

Also gilt auch

$$\sum_{b \in B_{i+1}} c_O(X_b) = c_O(X) > c_O(Y) = \sum_{b \in B_{i+1}} c_O(Y_b). \quad (5.8)$$

Dies steht im Widerspruch dazu, dass für jede Bewegung b in Iteration $i + 1$ Ungleichung 5.6 erfüllt sein muss. Für mindestens eine Bewegung $b = (s, i + 1, p, p') \in B_{i+1}$ muss nach Gleichung 5.8 also $c_O(X_b) > c_O(Y_b)$ gelten. Aus $c_{i+1}(p') < c_{i+1}(p)$ und Gleichung 5.3 folgt dann aber sofort $c_{i+2}(p') < c_{i+2}(p)$. Damit kann eine zugehörige Rückbewegung $b' = (s, i + 2, p', p)$ nicht existieren. Es folgt also aus Gleichung 5.8, dass mindestens eine Bewegung in Iteration $i + 1$ keine Falsche Bewegung ist.

Die Annahme, dass eine Direkte Oszillation für einen beliebigen Straßengraphen, beliebige O-D-Paare und lineare Kostenfunktionen nach Formel 5.2 existieren kann, führt also zu einem Widerspruch. Damit folgt, dass unter diesen Voraussetzungen keine Direkte Oszillation auftreten kann. ■

5.2.3 Verallgemeinerung der Kostenfunktionen

Für den bisherigen Teil dieses Abschnitts bewirkt nach der Annahme der linearen Kantenkosten nach Formel 5.2 ein zusätzlicher Verkehrsteilnehmer beziehungsweise ein zusätzliches O-D-Paar auf einer Kante eine Kostenverringerung um genau 1. In diesem Abschnitt soll der Beweis der Nicht-Existenz von Direkten Oszillationen auf allgemeine, monoton fallende Kostenfunktionen ausgeweitet werden. Es soll also das folgende Theorem bewiesen werden:

Theorem 5.7 (Nicht-Existenz von Direkten Oszillationen für monoton fallende Kantenkosten): *Für beliebige Eingabegraphen, beliebige O-D-Paare und monoton fallende Kantenkosten für jede Kante können bei der Durchführung des ITA-Verfahrens keine Direkten Oszillationen auftreten.*

Beweis. Die vereinfachten Kostenfunktionen werden im Beweis von Theorem 5.4 für lineare Kantenkosten in der Definition 5.6 des Bewegungsgraphen genutzt. Für jede Straßenkante $e \in E$ des Netzwerkgraphen liegen im Bewegungsgraphen Bewegungskanten in Abhängigkeit davon vor, wie viele Bewegungen die Straßenkante e in Iteration $i + 1$ betreten und wie viele sie verlassen. Die Differenz $|A_{e,i+1}| - |D_{e,i+1}|$ beziehungsweise $|D_{e,i+1}| - |A_{e,i+1}|$ der Mächtigkeiten dieser beiden Mengen von Bewegungen $A_{e,i+1}$ und $D_{e,i+1}$ bestimmt dabei jeweils die Kantengewichte im Bewegungsgraphen G_O .

Entscheidend für den Beweis ist aber nur, dass die Kantengewichte im Bewegungsgraphen den absoluten Kostenänderungen im Netzwerkgraphen G entsprechen und zwar so, dass Gleichung 5.3 für alle Bewegungen in Iteration $i + 1$ erfüllt ist. Für die vereinfachten Kostenfunktionen entspricht die Differenz $|A_{e,i+1}| - |D_{e,i+1}|$ jeweils schon gerade dem Wert, um den sich die Kosten der Straßenkante e durch die Bewegungen in Iteration $i + 1$ reduzieren. Für allgemeine, monoton fallende Kostenfunktionen muss die Definition des Bewegungsgraphen wie folgt angepasst werden.

Definition 5.8 (Bewegungsgraph für monoton fallende Kantenkosten): *Sei für jede Straßenkante $e \in E$ der Wert $a_e^{i+2} := |c_{i+2}(e) - c_{i+1}(e)|$ die absolute Kostenänderung von Kante e , die Bewegungen in Iteration $i + 1$ ausgelöst haben. Für jede Kante $e \in E$ existieren dann nach folgenden Prinzipien Bewegungskanten in der Kantenmenge E_O des Bewegungsgraphen G_O :*

Fall 1 $c_{i+2}(e) < c_{i+1}(e)$: E_O enthält eine Kante $x_{e,b} = (x, b)$ mit Gewicht $c_O(x_{e,b}) = a_e^{i+2}$ für alle Bewegungen $b \in B_{i+1}$, auf deren Zielpfad e liegt. E_O enthält eine Kante $y_{e,b} = (b, y)$ mit Gewicht $c_O(y_{e,b}) = a_e^{i+2}$ für alle Bewegungen $b \in B_{i+1}$, auf deren Ursprungspfad e liegt.

Fall 2 $c_{i+2}(e) > c_{i+1}(e)$: E_O enthält eine Kante $x_{e,b} = (x, b)$ mit Gewicht $c_O(x_{e,b}) = a_e^{i+2}$ für alle Bewegungen $b \in B_{i+1}$, auf deren Ursprungspfad e liegt. E_O enthält eine Kante $y_{e,b} = (b, y)$ mit Gewicht $c_O(y_{e,b}) = a_e^{i+2}$ für alle Bewegungen $b \in B_{i+1}$, auf deren Zielpfad e liegt.

Fall 3 $c_{i+2}(e) = c_{i+1}(e)$: Für Kante e existieren keine Kanten in E_O .

Eine Bewegung hat dann weiterhin eingehende und ausgehende Bewegungskanten genau für alle Straßenkanten e , die sie betritt und die sie verlässt und deren Kosten sich in Iteration $i + 2$ geändert haben. Betritt sie eine Straßenkante, die in Iteration $i + 2$ an Kosten verliert oder verlässt sie eine, die an Kosten gewinnt, so erhält sie eine eingehende Kante im Bewegungsgraphen G_O . Betritt sie eine Kante, die an Kosten gewinnt oder verlässt eine, die an Kosten verliert, erhält sie eine ausgehende Kante im Bewegungsgraphen. Die Bewegungskanten E_O haben dabei nach Definition 5.8 genau die absoluten Kostenänderungen der Straßenkanten E als Gewicht, analog zum Bewegungsgraphen der vereinfachten linearen Kantenkosten.

Die weiteren Folgerungen des Beweises zu linearen Kantenkosten gelten dann auch für die allgemeinere Definition 5.8 des Bewegungsgraphen. Die eingehenden Bewegungskanten X_b an Bewegung $b = (s, i + 1, p, p')$ entsprechen weiterhin den Kostenänderungen, die den Effekt dämpfen, der die Bewegung b zur Falschen Bewegung macht und die Rückbewegung $b' = (s, i + 2, p', p)$ auslöst. Die ausgehenden Bewegungskanten Y_b entsprechen den Kostenänderungen, die diesen Effekt verstärken.

Gleichung 5.3 ist weiterhin für jede Bewegung $b \in B_{i+1}$ in Iteration $i + 1$ erfüllt und wenn eine Direkte Oszillation $O = (i, 2)$ vorliegt, so gilt für jede Bewegung $b \in B_{i+1}$ (siehe Ungleichung 5.6):

$$c_O(X_b) < c_O(Y_b) .$$

Es wird nun wieder die Menge X aller eingehenden und Y aller ausgehenden Kanten an Bewegungen im Bewegungsgraphen G_O betrachtet. Es seien die Werte $m_{e,x}$ und $m_{e,y}$ wie im Beweis zu linearen Kantenkosten definiert als die Summe der Gewichte von eingehenden und ausgehenden Bewegungskanten, die Kostenänderungen der Straßenkante $e \in E$ entsprechen. Für beliebige, monoton fallende Kostenfunktionen gilt für jede Kante $e \in E$ des Straßengraphen

$$m_{e,x} = \max\{|A_{e,i+1}|, |D_{e,i+1}|\} \cdot a_e^{i+2} \text{ und } m_{e,y} = \min\{|A_{e,i+1}|, |D_{e,i+1}|\} \cdot a_e^{i+2} . \quad (5.9)$$

Wieder folgt sofort

$$c_O(X) > c_O(Y) . \quad (5.10)$$

Dies steht wiederum im Widerspruch dazu, dass Ungleichung 5.6 für jede Bewegung im Bewegungsgraphen erfüllt ist und damit folgt, dass auch für allgemeine, monoton fallende Kostenfunktionen keine Direkten Oszillationen auftreten können. ■

5.2.4 Verallgemeinerung der Oszillationsgröße

Im bisherigen Abschnitt wurde die Nicht-Existenz von Direkten Oszillationen, also Oszillationen in 2 Iterationen, bewiesen. Um die Konvergenz-Vermutung 5.1 zu beweisen, muss dieser Beweis auf Oszillationen in n Iterationen für allgemeine Anzahlen an Iterationen $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ ausgeweitet werden. Dabei entstehen eine Reihe von Schwierigkeiten, die in diesem Abschnitt betrachtet werden.

Induktion über die Oszillationslänge Ein erster Ansatz könnte sein, einen Induktionsbeweis über die Länge der Oszillationen zu führen, um für alle $n \in \mathbb{N}$ zu zeigen, dass keine Oszillation in n Iterationen auftreten kann. Für einen solchen Beweis stellt der obige Beweis für Direkte Oszillationen den Induktionsanfang für $n = 2$ dar. Um den Induktionsschritt durchzuführen, könnten verschiedene Verallgemeinerungen der bisher definierten Strukturen hilfreich sein. Im restlichen Abschnitt wird für diesen Ansatz einer Induktion stets eine Oszillation $O = (i, n + 1)$ in $n + 1$ Iterationen für ein $i \in \mathbb{N}$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ untersucht.

Verallgemeinerung des Bewegungsbegriffs Verallgemeinert werden könnte zum Beispiel die Definition einer Bewegung. Im Beweis für eine Direkte Oszillation $O = (i, 2)$ werden die (Falschen) Bewegungen der Iteration $i + 1$ betrachtet und der Umstand untersucht, dass für all diese Bewegungen der Ursprungspfad in der Folgeiteration günstiger als der Zielpfad ist.

Für eine allgemeine Oszillation $O = (i, n + 1)$ könnten die Bewegungen zwischen den Iterationen $i + 1$ und $i + n$ analysiert werden, um analog dazu zu überprüfen, warum jedes O-D-Paar $s \in S$ mit $p_{i+n}(s) \neq p_i(s)$ in Iteration $i + n + 1$ zum Ursprungspfad $p_i(s)$ zurückkehrt. Dafür können Bewegungen wie folgt verallgemeinert werden, um die Wechselwirkungen zwischen solchen O-D-Paaren zu untersuchen, die nach Iteration $i + n$ noch nicht zu ihrem Ursprungspfad zurückgekehrt sind.

Definition 5.9 (Bewegung in n Iterationen): *Eine Bewegung in n Iterationen $b_{i+1,n}^s = (s, i + 1, i + n, p, p')$ beschreibt den Wechsel des kürzesten Pfades für O-D-Paar s von Pfad p in Iteration i zu Pfad p' in Iteration $i + n$. Sie sammelt alle Bewegungen des entsprechenden O-D-Paars s der Iterationen $i + 1, \dots, i + n$ und fasst sie in einer Bewegung von Ursprungspfad $p = p_i(s)$ zu kürzestem Pfad $p' = p_{i+n}(s)$ in Iteration $i + n$ zusammen. Es gilt dabei weiterhin stets $p \neq p'$. Die Menge $B_{i+1,n}$ sei die Menge aller Bewegungen in n Iterationen zwischen den Iterationen $i + 1$ und n .*

Für die allgemeinere Definition von Bewegungen könnte analog zu Definition 5.6 der Bewegungsgraph definiert werden. Dabei bestimmen für eine Bewegung $b_{i+1,n}^s = (s, i + 1, i + n, p, p')$ die Kostenänderungen auf den Pfaden p und p' zwischen den Iterationen $i+1$ und $i+n+1$ die Gewichte der eingehenden und ausgehenden Bewegungskanten. Die Gewichte sind dann also jeweils durch die absolute Kostendifferenz $|c_{i+n+1}(e) - c_{i+1}(e)|$ auf einer Straßenkante $e \in E$ gegeben.

Für jede Bewegung $b_{i+1,n}^s = (s, i + 1, i + n, p, p') \in B_{i+1,n}$ gilt weiterhin eine verallgemeinerte Form der Gleichung 5.3, also

$$c_{i+n+1}(p) - c_{i+n+1}(p') = c_{i+1}(p) - c_{i+1}(p') + c_O(X_b) - c_O(Y_b) .$$

Ein zentrales Problem mit diesem Ansatz ist jedoch, dass für die Bewegungen nicht mehr im Allgemeinen Ungleichung 5.6, also

$$c_O(X_b) < c_O(Y_b)$$

gefolgert werden kann. Bei einer Direkten Oszillation $O = (i, 2)$ war hierfür entscheidend, dass der Zielpfad p' in Iteration $i + 1$ günstiger als der Ursprungspfad p ist, und dass dies in Iteration $i + 2$ nicht mehr der Fall ist.

In der allgemeineren Situation kann es jedoch sein, dass ein O-D-Paar $s \in S$ in Iteration $i + n$ einen kürzesten Pfad $p_{i+n}(s)$ hat, für den gilt:

$$\forall j \in \{i + 1, \dots, i + n\} : c_j(p_{i+n}(s)) > c_{i+1}(p_i(s)) .$$

Erhöhen sich die Kosten des Ursprungspfades $p_i(s) = p_{i+n+1}(s)$ im Laufe der Iterationen $i + 1, \dots, i + n$, so könnte der kürzeste Pfad $p_{i+n}(s)$ zwischen O-D-Paar s in Iteration $i + n$ ein solcher sein, der in keiner der Iterationen kleinere Kosten hat als der Ursprungspfad $p_i(s)$ in Iteration $i + 1$. Die Summe der ausgehenden Kantengewichte müssen für eine solche Bewegung dann nicht größer sein als die Summe der Eingehenden.

Dennoch könnte für eine Ausweitung des Beweises auf allgemeine Oszillationen die Definition von Bewegungen in n Iterationen nützlich sein. Bis zu Iteration $i + n$ liegen für ein O-D-Paar s mit $p_{i+n}(s) \neq p_i(s)$ schließlich solche Kostenentwicklungen vor, die dazu führen, dass $p_{i+n}(s)$ der kürzeste Pfad in Iteration $i + n$ ist. Bestimmen diese Kostenentwicklungen für jede Bewegung im Bewegungsgraphen die eingehenden Gewichte, so könnten ausgehende Gewichte definiert werden, deren Summe die Summe der Eingehenden übersteigen muss. Die ausgehenden Gewichte müssten dafür entsprechend die Kostenentwicklungen repräsentieren, die die Rückbewegung zum Ursprungspfad $p_i(s) = p_{i+n+1}$ in Iteration $i + n + 1$ bewirken.

Eine weitere Schwierigkeit entsteht, wenn für den Beweis all diese Kostenänderungen der Iterationen zwischen $i + 1$ und $i + n$ betrachtet werden. Es kann ein O-D-Paar s bereits in einer Iteration j mit $j < i + n + 1$ wieder dem Ursprungspfad $p_i(s)$ zugeordnet werden, sodass $p_j(s) = p_{i+n}(s) = p_i(s)$ gilt und das O-D-Paar s sich in Iteration $i + n + 1$ nicht bewegt. Eine solche vorzeitige Rückbewegung kann dann Auswirkungen auf die Kosten der Pfade eines anderen O-D-Paars s' mit $p_{i+n}(s') \neq p_i(s')$ haben, ohne dass für das O-D-Paar s eine Bewegung in n Iterationen im Bewegungsgraphen vorliegt. Ein Widerspruch bezüglich der eingehenden und ausgehenden Bewegungskanten kann dann nicht mehr gefolgert werden.

Es könnte daher hilfreich sein, nur Bewegungen in einer Iteration zu betrachten und für eine Oszillation $O = (i, n + 1)$ alle solchen Bewegungen der Iterationen $i + 1, \dots, i + n + 1$ als Knoten in einen Bewegungsgraphen einzufügen. Wechselwirkungen zwischen Bewegungen, die sich Ursprungs- und Zielpfade teilen, könnten durch Kanten zwischen den Bewegungsknoten repräsentiert werden. Ein solcher Graph könnte hilfreich sein um Kostenentwicklungen auszuschließen, die dazu führen, dass zu jeder Bewegung b in einer Oszillation, egal in welcher Iteration sie erfolgt, eine Rückbewegung des entsprechenden O-D-Paars zurück zum Ursprungspfad der Bewegung b existiert.

5.3 Weitere Beweisansätze

Dieser Abschnitt behandelt Beweisansätze für die Konvergenz-Vermutung 5.1, die keine Oszillationen der Pfadzustände betrachten. Sie sollen als Hilfe für die weitere Analyse des Konvergenzverhaltens des ITA-Verfahrens dienen.

Das ITA-Verfahren als Fixpunktiteration Das ITA-Verfahren kann als Fixpunktiteration aufgefasst werden. Für jeden Verkehrsfluss $f = (f_{e_1}, \dots, f_{e_{|E|}})$ sind die Kantenkosten $c_e(f_e)$ eindeutig für jede Kante $e \in E$ bestimmt. Für diese Kantengewichte sind nach der Annahme der Eindeutigkeit kürzester Pfade aus Abschnitt 3.1 wiederum die kürzesten Pfade für jedes O-D-Paar eindeutig bestimmt. Für diesen Pfadzustand, also die Zuordnung von O-D-Paaren zu den eindeutigen kürzesten Pfaden, ist der entsprechende Verkehrsfluss eindeutig bestimmt.

Es können also wie folgt zwei Funktionen c und v definiert werden, die einen Verkehrsfluss auf Kostenvektoren und Kostenvektoren auf Verkehrsflüsse abbilden:

$$c : \mathbb{N}_0^{|E|} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}^{|E|}, c \left((f_{e_1}, \dots, f_{e_{|E|}}) \right) = (c_{e_1}(f_{e_1}), \dots, c_{e_{|E|}}(f_{e_{|E|}})) \quad (5.11)$$

und

$$v : \mathbb{R}_{\geq 0}^{|E|} \rightarrow \mathbb{N}_0^{|E|}, c \mapsto AON(c) . \quad (5.12)$$

Hierbei ist $AON(c)$ für einen gegebenen Kantenkostenvektor $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{|E|}$ der eindeutige Verkehrsfluss, der durch AON bezüglich dieser Kantenkosten entsteht.

Betrachte nun die Funktion

$$f_{ita} = v \circ c : \mathbb{N}_0^{|E|} \rightarrow \mathbb{N}_0^{|E|} .$$

Für einen Verkehrsfluss f entsteht dann der Verkehrsfluss $f_{ita}(f)$ gerade aus der Ausführung einer Iteration des ITA-Verfahrens mit dem Verkehrsfluss f als Eingabe. Ein Verkehrsfluss f repräsentiert also genau dann ein Nutzer-Equilibrium, wenn $f_{ita}(f) = f$, wenn also f ein Fixpunkt der Funktion f_{ita} ist.

Die Darstellung der Lösung als Fixpunkt einer Funktion könnte nützlich sein, um allgemein die Existenz eines Nutzer-Equilibriums für ITA zu zeigen. Weiter könnte die Konvergenz des ITA-Verfahrens bewiesen werden, indem gezeigt wird, dass die folgende Fixpunktiteration konvergiert: Für das Ergebnis von AON bezüglich der Free-Flow-Kosten, also für den initialen Verkehrsfluss $f^0 \in \mathbb{N}_0^{|E|}$, berechne für $k \in \mathbb{N}_0$

$$f^{k+1} = f_{ita}(f^k). \quad (5.13)$$

Monotoner Verlauf konvergierender Variablen Die Konvergenz des ITA-Verfahrens könnte bewiesen werden, indem eine von den Pfadzuständen beziehungsweise Verkehrsflüssen abhängige Variable gefunden wird, die über die Iterationen hinweg einen monotonen Verlauf hat und deren Menge an möglichen Werten beschränkt ist. Abschnitt 6.3 untersucht die Entwicklungen verschiedener Variablen, anhand deren Verlauf die Nähe der Verkehrsflüsse zu einem Nutzer-Equilibrium gemessen werden kann. Die dabei untersuchten Variablen haben keinen monotonen Verlauf für allgemeine Eingaben.

Eine weitere Möglichkeit sind Variablen, die den Fortschritt der erwünschten Wirkung von Inverse Traffic Assignment messen. Durch die fallenden Kantenkosten kann erwartet werden, dass sich das Verkehrsaufkommen im Laufe des ITA-Verfahrens auf wenige Kanten konzentriert und dort höhere Flusswerte entstehen. Eine Variable, die diesen Anstieg der *Nutzungsintensität* der Kanten misst, könnte einen monotonen Verlauf aufweisen. Bei der Definition einer solchen Variable treten verschiedene Schwierigkeiten auf. Werden lediglich die Flusswerte betrachtet, um die Nutzungsintensität zu berechnen, kann diese fallen, wenn Flussbewegungen von Kanten mit höheren Flusswerten zu Kanten mit niedrigeren Flusswerten erfolgen. Durch geringere Free-Flow-Kosten können Pfade mit niedrigeren Flusswerten geringere Kosten als Pfade mit höheren Flusswerten aufweisen und solche Flussbewegungen auslösen. Für die Berechnung der Nutzungsintensität könnten also auch die Free-Flow-Kosten hilfreich sein.

Weiter könnten allgemein für die Bestimmung von Variablen mit monotonem Verlauf vereinfachende Annahmen über das Netzwerk nützlich sein, wie Vereinfachungen der Kostenfunktionen, der Eingabegraphen oder Annahmen über die Anzahl an möglichen Pfaden pro O-D-Paar.

Relationen auf O-D-Paaren, Pfaden und Kanten Es könnte für den Konvergenzbeweis nützlich sein, Relationen auf den Strukturen des Verfahrens zu definieren.

Auf O-D-Paaren könnte eine Ordnung nach den minimalen Reisekosten zwischen Start- und Zielknoten oder nach den Flusswerten auf den jeweiligen kürzesten Pfaden definiert werden. Bewegt sich ein O-D-Paar, so führt die Bewegung zu einem günstigeren neuen Pfad. Dies kann durch geringere Free-Flow-Kosten oder höhere Flusswerte auf diesem Pfad, verglichen mit dem alten kürzesten Pfad, entstehen. Höhere Flusswerte entstehen dabei dadurch, dass die kürzesten Pfade anderer O-D-Paare gemeinsame Teilpfade mit dem neuen kürzesten Pfad haben. Diese Beziehungen zwischen O-D-Paaren könnten ebenfalls in einer Relation repräsentiert werden. Es könnte hilfreich sein, die Struktur eines Graphen zu betrachten, der O-D-Paare als Knoten hat und Kanten, die die Wechselwirkungen zwischen O-D-Paaren repräsentieren. Dies könnte nützlich sein um auszuschließen, dass Wechselwirkungen möglich sind, die dazu führen, dass sich die kürzesten Pfade für alle O-D-Paare in einer Oszillation wiederholen.

Pfade können ebenfalls geordnet werden nach Gesamtkosten oder Flusswerten entlang der Pfade. Hierbei könnte beobachtet werden, dass sich von Pfaden mit geringen Kosten beziehungsweise hohen Flusswerten weniger Fluss zu Pfaden mit hohen Kosten beziehungsweise niedrigen Flusswerten bewegt als in die entgegengesetzte Richtung. Hierbei entstehen allerdings dadurch Schwierigkeiten, dass Pfade sich beliebig überschneiden können. Pfade mit besonders niedrigen Kosten können sich Kanten teilen mit Pfaden mit besonders hohen Kosten. Auf diese Weise kann sich Fluss von günstigeren Pfaden zu (Teilen von) teureren Pfaden bewegen.

Um diese Schwierigkeiten bei Ordnungen von Pfaden zu umgehen, können Ordnungen auf den einzelnen Kanten betrachtet werden. Wieder können sie nach Kantenfluss oder Kantenkosten geordnet werden. Weiter könnte die Anzahl an kürzesten Pfaden, auf denen eine Kante liegt, eine hilfreiche Variable für eine Ordnung sein. Diese Anzahl bestimmt direkt den Kantenfluss und damit die Kantenkosten. Es kann erwartet werden, dass im Laufe des ITA-Verfahrens diese Anzahl für viele Kanten sinkt und für einige Kanten stark ansteigt, was eine Ordnung auf den Kanten beeinflusst.

Allgemein könnte es für eine passend definierte Ordnungsrelation nützlich sein zu betrachten, wie die Kanten oder Pfade in Relation stehen, zwischen denen sich Fluss bewegt. Bewegt sich dabei Fluss stets nur in eine Richtung, könnte eine Monotonie im Verlauf von Kantennutzungen erkannt werden oder Oszillationen in den Flussbewegungen ausgeschlossen werden.

Vereinfachte Kostenfunktionen Verschiedene Vereinfachungen in Bezug auf die Kantenkosten könnten hilfreich für den Konvergenzbeweis sein. Schwierigkeiten bei anderen Beweisansätzen treten häufig dadurch auf, dass Flussbewegungen verschiedene Wirkungen haben, abhängig davon, zu welchen Kanten und Pfaden sie führen. Durch individuelle Wahl der Parameter einer Kostenfunktion für jede Kante, wie für die Kostenfunktionen aus Abschnitt 4.3, kann zusätzlicher Fluss auf verschiedenen Kanten zu verschieden starken Kostenreduzierungen führen. Weiter kann allgemein eine Kante mit geringen Free-Flow-Kosten für kleinere Flusswerte einen festen, geringen Kostenwert erreichen als eine Kante mit hohen Free-Flow-Kosten.

Eine hilfreiche Verallgemeinerung kann also die Annahme einer einheitlichen Kostenfunktion für alle Kanten des Netzwerks sein. Darüber hinaus könnte die Annahme hilfreich sein, dass eine gleiche Anzahl an zusätzlichem Fluss stets zu einer gleichen Reduzierung der Kantenkosten führt, wie für die vereinfachten, linearen Kosten aus Abschnitt 5.2. Für streng konvexe Kostenfunktionen ist dies nicht erfüllt, da die durch zusätzlichen Fluss erreichte Kostenreduzierung im Kantenfluss sinkt.

Um die Entwicklung der Kantenkosten im Kantenfluss weiter anzugleichen, können einheitliche, feste Free-Flow-Kosten für jede Kante angenommen werden, zum Beispiel Einheitskosten 1. So wird sichergestellt, zusammen mit obigen Vereinfachungen, dass zwei beliebige Kanten mit gleichem Flusswert auch gleiche Kantenkosten haben.

6 Experimente

Dieses Kapitel beschreibt die Evaluation des ITA-Verfahrens auf verschiedenen Eingabedaten und unter Verwendung verschiedener Kostenfunktionen. Das Verfahren wird hierfür in C++ implementiert und auf einem Straßennetzwerk und verschiedenen Mengen von O-D-Paaren ausgeführt.

Abschnitt 6.1 beschreibt die verschiedenen Eingaben, auf denen das Verfahren getestet wurde. In Abschnitt 6.2 werden die vom Verfahren berechneten Straßenauslastungen im Eingabennetzwerk visualisiert. Abschnitt 6.3 untersucht den Verlauf der Werte verschiedener vom Verkehrsfluss abhängigen Variablen im Laufe des Verfahrens. Der Einfluss der Anzahl an O-D-Paaren auf das Konvergenzverhalten des Verfahrens wird in Abschnitt 6.4 analysiert. Zuletzt wird in Abschnitt 6.5 visualisiert, auf welchen Straßen der Verkehrsfluss im Laufe des Verfahrens besonders stark zunimmt und auf welchen er besonders stark abnimmt, verglichen mit der Free-Flow-Zuordnung durch AON.

6.1 Eingaben

Das Straßennetzwerk, auf dem das ITA-Verfahren getestet wird, entspricht der Region Stuttgart [SHP11]. Das Netzwerk umfasst 134 663 Knoten und 307 759 Kanten [BSW19].

Die Daten zur Verkehrsnachfrage stammen von der Anwendung von mobiTopp auf die entsprechende Region, die auf einer Haushaltsbefragung zum Verkehrsverhalten beruht [MKV13 | Stu11]. Für diese Arbeit wird lediglich der Transport per Auto berücksichtigt, da auf diesem der Fokus bei der angestrebten Reduktion der Emissionen und des Energieverbrauchs liegt. Das Verfahren wird auf vier verschiedenen Mengen von O-D-Paaren ausgeführt, die jeweils eine der folgenden Gruppen von Fahrten repräsentieren:

- 1 *OD-M*: Eine Stoßzeit an einem Dienstag Morgen
- 2 *OD-A*: Eine Stoßzeit an einem Dienstag Abend
- 3 *OD-T*: Ein gesamter Dienstag
- 4 *OD-W*: Eine gesamte Woche

Die Werte in der Tabelle 6.1 stammen aus der Arbeit von Buchhold et al. und zeigen die Anzahl an O-D-Paaren, also einzelnen Fahrten von Start- zu Zielpunkten, für jede dieser Mengen [BSW19].

Um die Entstehung eines Nutzer-Equilibriums zu analysieren, wird die Verkehrsnachfrage zwischen jedem O-D-Paar als konstant in der betrachteten Zeitperiode angenommen. Diese Annahme ist präziser für kürzere Zeitperioden (wie die Stoßzeiten *OD-M* und *OD-A*) [She85]. Die Zeitperiode einer gesamten Woche ist laut Buchhold et al. jedoch sehr uneinheitlich [BSW19]. Dennoch kann die Ausführung des ITA-Verfahrens auch auf den größeren Gruppen *OD-T* und *OD-W* nützlich sein, um das Konvergenzverhalten des Verfahrens zu analysieren.

Tabelle 6.1: Die Anzahl an Fahrten in den verwendeten Gruppen von O-D-Paaren.

Gruppe	Zeitperiode	Anzahl an O-D-Paaren
OD-M	7:30 - 8:30	248 431
OD-A	16:30 - 17:30	280 364
OD-T	gesamter Dienstag	3 355 442
OD-W	gesamte Woche	21 248 278

Für die Kürzeste-Wege-Berechnung wird die CCH-Implementierung aus der Bibliothek RoutingKit zu der Arbeit von Dibbelt et al. verwendet [DSW16]. Um die Kantengewichte in jeder Iteration neu zu berechnen, werden die in Abschnitt 4.3 vorgestellten Kostenfunktionen implementiert.

Konvergenzkriterien Um ein Nutzer-Equilibrium zu erhalten, muss der strenge Konvergenztest nach Algorithmus 4.1 implementiert und in jeder Iteration ausgeführt werden. Er ist genau dann erfolgreich, wenn sich der Kantenfluss in der entsprechenden Iteration auf keiner Kante geändert hat.

Um die Anzahl der Iterationen einer Ausführung des ITA-Verfahrens zu reduzieren, kann als Test auf hinreichende Konvergenz der *relative gap* (RGAP, siehe Abschnitt 4.2) mit einer ausreichend kleinen Konstante verglichen werden. Das Verfahren terminiert hierbei also, sobald die Kosten der tatsächlich befahrenen Routen hinreichend nah an den Kosten der für den vorliegenden Verkehrsfluss kürzesten Routen liegen.

Laut Boyce et al. ist für reguläres Traffic Assignment ein RGAP von 10^{-4} für ausreichende Konvergenz nötig [BRB04]. Für die Experimente in diesem Kapitel wurde also dieser Wert für den Konvergenztest verwendet und die resultierenden Verkehrsflüsse mit denen im Nutzer-Equilibrium verglichen, die nach erfolgreichem strengen Konvergenztest vorliegen.

6.2 Das Ergebnis der Verkehrszuordnung

In diesem Abschnitt wird analysiert, wie das ITA-Verfahren die gegebene Verkehrsnachfrage einem Straßennetzwerk zuweist. Dafür werden Vektorgrafiken erstellt, die für verschiedene Kostenfunktionen die resultierende Straßenauslastung visualisieren. In Abbildung 6.1 sind solche Vektorgrafiken zu sehen. Abbildung 6.1a stellt das gesamte Straßennetzwerk der Region Stuttgart dar, das in diesem Kapitel stets die Eingabe des Verfahrens darstellt. Abbildung 6.1b zeigt einen Ausschnitt, der einen kleineren Bereich um das Stadtzentrum herum abbildet. Die Grenzen des Ausschnitts orientieren sich an der Arbeit von Buchhold et al. [BSW19]. Durch das ITA-Verfahren entstehen hohe Kantenflüsse vor allem um das Stadtzentrum herum, weshalb die Analyse sich im Folgenden auf diesen Ausschnitt beschränkt.

Um die Straßenauslastung zu visualisieren, sind in den folgenden Abschnitten schwach ausgelastete Straßen grün und stärker ausgelastete Straßen rot dargestellt. Die Farbe einer Straße ist jeweils eine Linearkombination aus den Farben Grün und Rot, die vom Verhältnis zwischen dem Fluss f_e und der Kapazität u_e der Straße abhängt. Je größer der Wert $\frac{f_e}{u_e}$, je stärker eine Straße also ausgelastet ist, desto stärker ist sie rot gefärbt. Die Breite einer Straße in den Grafiken steigt in der Kapazität der Straße.

Für die Resultate in diesem Abschnitt erhält das ITA-Verfahren als Eingabe jeweils die Menge OD-M an O-D-Paaren eines Morgens.

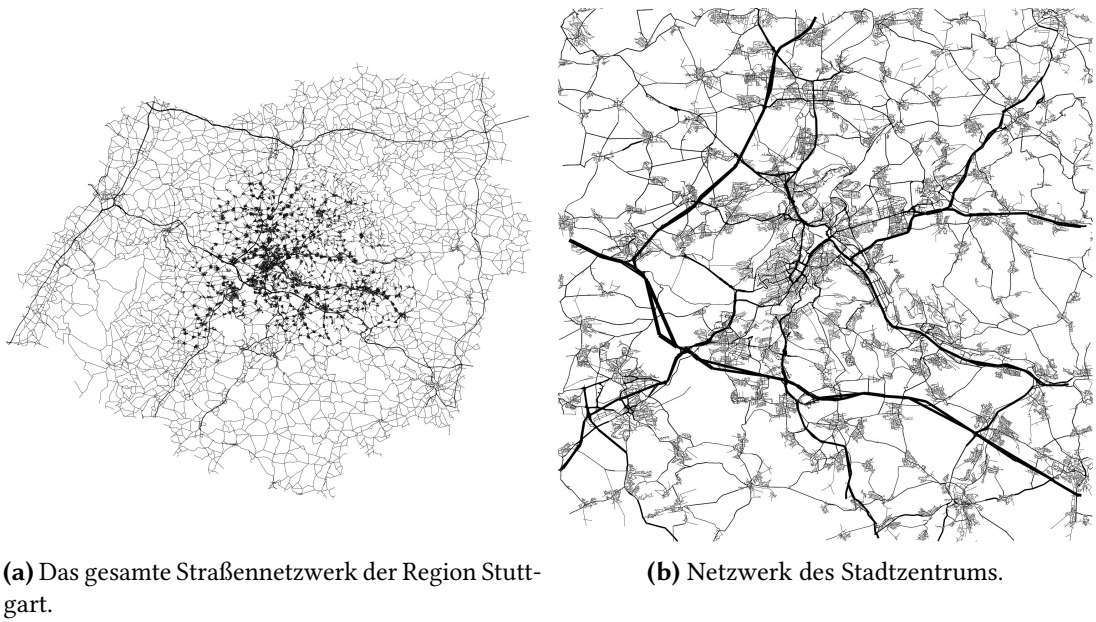


Abbildung 6.1: Ausschnitte des Eingabegraphen für die Analyse des ITA-Verfahrens.

Exponentengewichtete Kostenreduzierung Dieser Abschnitt untersucht die Ergebnisse des ITA-Verfahrens für die Nutzung der in Abschnitt 4.3.1 definierten Exponentengewichteten Kostenreduzierung. Es ist also für jede Kante e die Kostenfunktion c_e gegeben durch

$$c_e(f_e) = d_e \cdot \left(\frac{\alpha_e}{f_e + \alpha_e} \right)^{\beta_e}$$

für die zwei Parameter $\alpha_e, \beta_e \in \mathbb{R}_+$. Abbildung 6.2 zeigt die Entwicklung der Straßenauslastungen über die Iterationen des ITA-Verfahrens hinweg. Für die Implementierung wurde $\alpha_e = 1$ und $\beta_e = \frac{1}{2}$ gesetzt.

Abbildung 6.2a zeigt die Initiallösung, also die Zuordnung des Verkehrs durch AON gemäß der Free-Flow-Gewichte. Vereinzelt nehmen Kanten für diesen Verkehrsfluss dunklere Farbtöne an. Diese stärker in der Initiallösung ausgelasteten Kanten verlieren an Kosten, wodurch nach wenigen Iterationen des ITA-Verfahrens (siehe Abbildung 6.2b) bereits einige stark ausgelastete Kanten vorliegen. Konvergiert das Verfahren anhand des RGAP-Konvergenzkriteriums, hat sich diese Tendenz verstärkt (siehe Abbildung 6.2c). Eine auffällige Änderung der Auslastung ist für weitere Iterationen bis zur Konvergenz in einem tatsächlichen Nutzer-Equilibrium (Abbildung 6.2d) nicht mehr zu erkennen.

Logarithmische Kostenreduzierung Für Logarithmische Kostenreduzierung nach Abschnitt 4.3.2 ist die Kostenfunktion für jede Kante e nach Gleichung 4.6 gegeben durch

$$c_e(f_e) = d_e \cdot \left(\frac{1}{\log_{\alpha_e}(f_e + \alpha_e)} \right)^{\beta_e}$$

für die zwei Parameter $\alpha_e, \beta_e \in \mathbb{R}_+$. Die Abbildung 6.3a zeigt die Straßenauslastung nach erfolgreichem RGAP-Konvergenztest für die Werte $\alpha_e = 2$ und $\beta_e = 2$.

Verglichen mit den Resultaten für Exponentengewichtete Kostenreduzierung ist auffallend, dass die maximalen Auslastungen weniger hoch sind. Dies kann darauf zurückgeführt werden, dass für Erhöhungen von geringen Kantenflüssen starke Kostenreduzierungen entstehen, während der Graph der Kostenfunktion für höhere vorliegende Kantenflüsse stark abflacht. Dadurch könnte zwar eine größere Anzahl an Kanten stark reduzierte Kosten aufweisen, die Kostenreduktion der verschiedenen Kanten mit verschiedenen hohen Kantenflüssen aber gleichmäßiger ausfallen. Eine, im Vergleich zu Exponentengewichteter Kostenreduzierung, ausgeglichenerer Netzwerkauslastung bei geringeren Maximalauslastungen der Kanten entspricht also gerade dem erwarteten Ergebnis für Logarithmische Kostenreduzierung.

Kapazitätsbeschränkte Kostenreduzierung Kapazitätsbeschränkte Kostenreduzierung soll besonders starke Auslastung von Straßen vermeiden, deren Kapazität auch bei Nutzung öffentlicher Verkehrsmittel mit großer Platzanzahl beschränkt ist. Gleichzeitig sollen Kantenkosten in der Kantenkapazität fallen, um der Annahme zu entsprechen, dass öffentliche Verkehrsmittel wirksamer auf Straßen mit höherer Kapazität eingesetzt werden können. Die Kostenfunktion für jede Kante e ist nach Gleichung 4.7 gegeben durch:

$$c_e(f_e) = \begin{cases} d_e \cdot \frac{u_{\min}}{u_e} \cdot \frac{1}{(f_e+1)^{\beta_e}}, & \text{falls } f_e < u_e \cdot r \\ d_e \cdot \frac{u_{\min}}{u_e} \cdot \frac{1}{(u_e \cdot r)^{\beta_e}}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

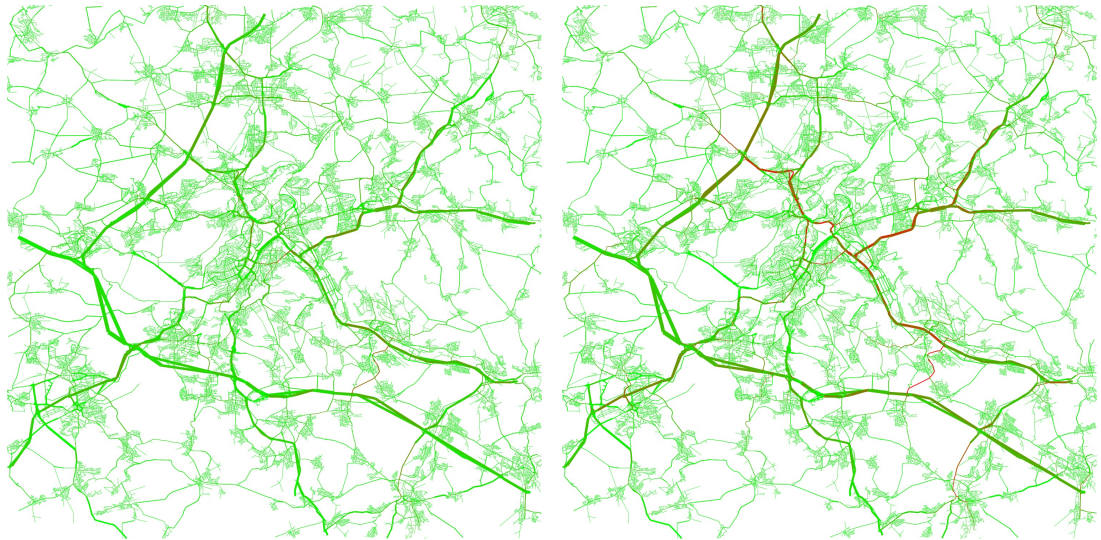
Die Abbildung 6.3b zeigt die Straßenauslastung nach erfolgreichem RGAP-Konvergenztest für den Wert $\beta_e = \frac{1}{2}$. Die minimale Kapazität u_{\min} unter allen Kanten ist 150 für den Eingabegraphen. Da die maximale Kapazität unter allen Kanten 10 000 beträgt und somit für einen Großteil der Kanten die Kapazität erst für einen hohen Flusswert erreicht wird, wurde ein kleiner Wert $r = 1$ gewählt.

Im Vergleich mit Exponentengewichteter Kostenreduzierung ist zu beobachten, dass gerade im Stadtzentrum eine ausgeglichenerer Auslastung der Kanten mit kleinen Kapazitäten entsteht. Es sind dagegen Kanten mit hohen Kapazitätswerten zu erkennen, die stärker ausgelastet sind.

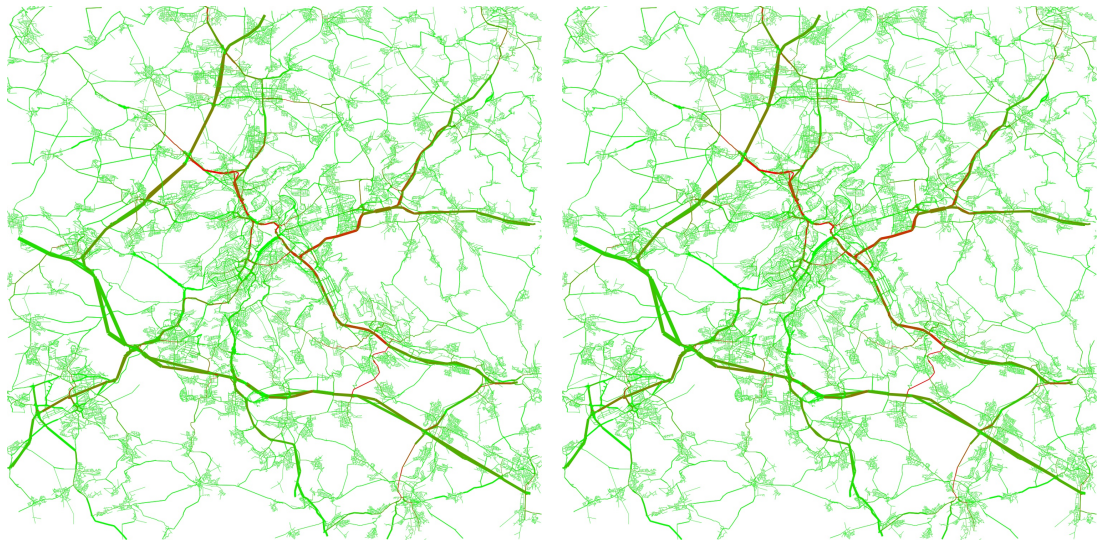
Diese Resultate können darauf zurückgeführt werden, dass die Kantenkosten wegen des Faktors $\frac{u_{\min}}{u_e}$ fallend in der Kantenkapazität sind. Weiter wird für Kanten mit kleiner Kapazität u_e die obere Schranke $u_e \cdot r$ bereits für kleinere Flusswerte überschritten, wodurch die Kosten dieser Kanten nicht weiter in zusätzlichem Fluss fallen. Eine ausgeglichenerer Auslastung von Kanten mit kleiner Kapazität bei erhöhter Auslastung von Kanten mit großer Kapazität ist also gerade das Ergebnis, das für Kapazitätsbeschränkte Kostenreduzierung erwartet werden kann und erwünscht ist.

6.3 Entwicklung verschiedener Variablen

In diesem Abschnitt werden verschiedene Variablen definiert, deren Wert in einer Iteration des ITA-Verfahrens die Nähe des Ergebnisses zum gesuchten Nutzer-Equilibrium repräsentiert. Weitere Variablen werden eingeführt, um den Effekt des Anreizes zu geteilter Mehrnutzung der Straßen zu analysieren. Die Entwicklung der folgenden Variablen, die jeweils für einen gegebenen Verkehrsfluss berechnet werden können, wird dabei im Laufe der Iterationen des ITA-Verfahrens betrachtet:



(a) Initiaillösung durch AON bezüglich der Free-Flow-Gewichte. (b) Lösung nach 3 Iterationen des ITA-Verfahrens.

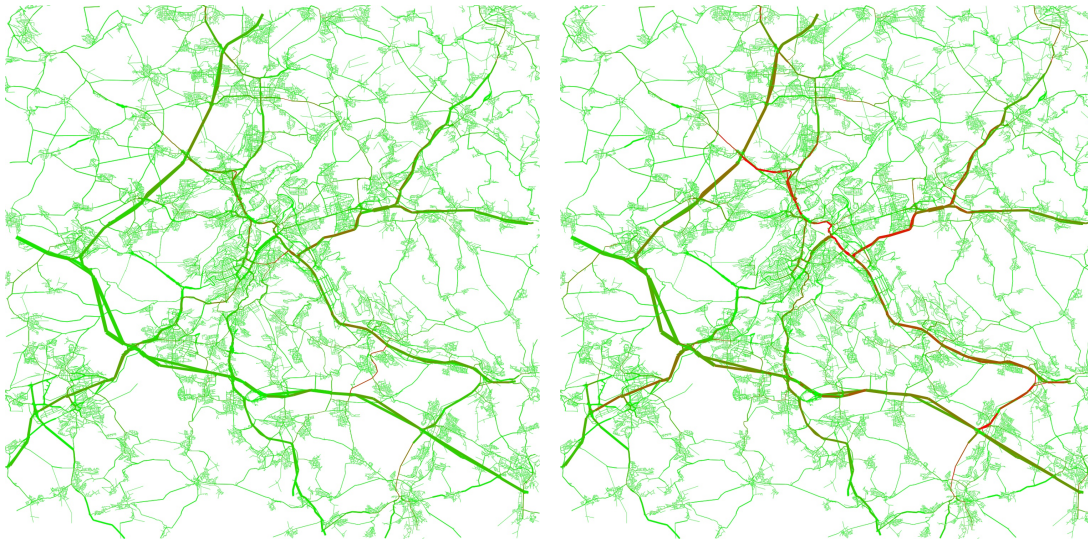


(c) Lösung nach 12 Iterationen bei Konvergenz für $\text{RGAP} < 10^{-4}$. (d) Tatsächliches Nutzer-Equilibrium nach 39 Iterationen.

Abbildung 6.2: Straßenauslastungen im ITA-Verfahren unter Verwendung von Exponentengewichteter Kostenreduzierung mit $\alpha_e = 1$ und $\beta_e = 0,5$.

- 1 Der relative gap, der nach Gleichung 4.1 berechnet werden kann. Der RGAP nimmt für ein Nutzer-Equilibrium gerade den Wert 0 an und kann daher verwendet werden, um die Nähe des vorliegenden Verkehrsflusses zu einem Nutzer-Equilibrium zu messen.
- 2 Die skalierte euklidische Distanz zweier aufeinanderfolgender Verkehrsflüsse:

$$\text{RCF} := \frac{\sqrt{\sum_{e \in E} (f_e^i - f_e^{i-1})^2}}{\sum_{e \in E} f_e^{i-1}}. \quad (6.1)$$



(a) Lösung bei Konvergenz nach 7 Iterationen unter Verwendung Logarithmischer Kostenreduzierung mit $\alpha_e = 2$ und $\beta_e = 2$.

(b) Lösung bei Konvergenz nach 8 Iterationen unter Verwendung Kapazitätsbeschränkter Kostenreduzierung mit $r = 1$ und $\beta_e = 0,5$.

Abbildung 6.3: Straßenauslastungen im ITA-Verfahren unter Verwendung von Logarithmischer und Kapazitätsbeschränkter Kostenreduzierung.

Der Wert kann laut Sheffi als Konvergenzkriterium für die Findung eines Nutzer-Equilibriums für RTA genutzt werden, wie in Abschnitt 4.2 beschrieben [She85]. Der Kantenfluss ändert sich im Nutzer-Equilibrium für keine Kante in der nächsten Iteration. Die euklidische Distanz der Verkehrsflüsse zweier aufeinanderfolgender Iterationen nimmt bei Konvergenz also auch den Wert 0 an und misst den Effekt der Kostenänderungen auf die Bewegungen einer Iteration. Der Wert wird abgekürzt durch RCF (*relative change in flow*).

- 3 Die Summe der relativen Änderungen der Reisekosten pro O-D-Paar zwischen zwei aufeinanderfolgenden Iterationen, die ebenfalls als Konvergenzkriterium für RTA verwendet werden kann [She85]:

$$\text{RCC} := \sum_{s \in S} \frac{|c_i(p_i(s)) - c_{i-1}(p_{i-1})|}{c_i(p_i(s))}. \quad (6.2)$$

Der Wert wird abgekürzt durch RCC (*relative change in costs*).

Die folgenden Werte können betrachtet werden, um den Effekt der fallenden Kantenkosten zu messen:

- 4 Das durchschnittliche Free-Flow-Gewicht der kürzesten Pfade, die die O-D-Paare verbinden:

$$\text{AFFC} := \frac{\sum_{s \in S} c_0(p_i(s))}{|S|}. \quad (6.3)$$

In der Erwartung steigt dieser Wert im Laufe der Iterationen, da die Verkehrsteilnehmer Umwege bezüglich der Free-Flow-Reisezeit befahren, wenn auf diesen eine besonders hohe Auslastung und damit reduzierte Kosten entstehen. Der Wert wird abgekürzt durch AFFC (*average free flow cost*).

- 5 Der durchschnittliche Fluss auf einer Kante, die befahren wird:

$$AAF := \frac{\sum_{e \in E_+^i} f_e^i}{|E_+^i|} \text{ mit } E_+^i = \{e \in E | f_e^i > 0\}. \quad (6.4)$$

Auch dieser Wert steigt in der Erwartung, da allgemein ein Anreiz zu erhöhter Kantennutzung besteht. Der Wert wird abgekürzt durch AAF (*average arc flow*).

- 6 Der maximale Fluss auf einer Kante:

$$MF := \max_{e \in E} f_e^i. \quad (6.5)$$

Durch den Anreiz zu Mehrnutzung jeder Kante steigt auch der Wert dieser Variable in der Erwartung. Der Wert wird abgekürzt durch MF (*maximum flow*).

Exponentengewichtete Kostenreduzierung Die Entwicklung der Variablen unter Verwendung von Exponentengewichteter Kostenreduzierung ist in Abbildung 6.4 zu sehen. Dabei werden für alle Kanten die gleichen Werte der Parameter α_e und β_e gewählt. Die Ergebnisse für die zwei Werte $\beta_e = 0,5$ und $\beta_e = 0,75$ des Exponenten β_e werden miteinander verglichen, wobei in beiden Fällen $\alpha_e = 1$ gesetzt wird.

Wie erwartet fallen die Werte der Variablen RGAP, RCF und RCC in einem Großteil der Iterationen des ITA-Verfahrens, während die Werte von AFFC, AAF und MF steigen. Der Wert von keiner der Variablen steigt beziehungsweise fällt jedoch monoton. Besonders die Graphen der Variablen RGAP, RCF und RCC weisen nach Iteration 10 Ausschläge auf. Dies könnte durch die Instabilität von AON erklärt werden. Dial beschreibt diese Instabilität für RTA als den Umstand, dass eine große Flussänderung durch kleine Kostenänderungen der Kanten entstehen kann [Dia71]. Dieser Effekt tritt ebenfalls für ITA auf. Für kleine Unterschiede in den Kosten der Pfade sind kleine Kostenänderungen ausreichend, um den kürzesten Pfad zwischen einem O-D-Paar zu ändern, wodurch in der folgenden Iteration des ITA-Verfahrens die gesamte Verkehrsnachfrage zwischen dem O-D-Paar einem neuen Pfad zugeordnet wird.

Gerade die Ausschläge in der RCF-Kurve könnten hierauf zurückgeführt werden, da auf diese Weise große Änderungen in den Kantenflüssen ausgelöst werden können, auch wenn die Flussbewegungen in der vorherigen Iteration klein waren (siehe Abbildung 6.4b).

Jedes O-D-Paar, das für die Routenwahl einer Iteration nicht dem kürzesten möglichen Pfad zugeordnet ist, erhöht den RGAP, weswegen die Instabilität von AON auch die starken Ausreißer in dieser Kurve erklären könnten (siehe Abbildung 6.4a).

Da AON durch den Wechsel des kürzesten Pfades die gesamte Verkehrsnachfrage zwischen dem entsprechenden O-D-Paar dem neuen kürzesten Pfad zuordnet, können sich die Kosten dieses Pfades durch erhöhten Fluss weiter verringern. Die Reduzierung der Reisekosten zwischen O-D-Paaren kann also durch den Wechsel zu einem neuen kürzesten Pfad verstärkt werden und damit Ausschläge im RCC-Graphen erklären (siehe Abbildung 6.4c).

Der Verlauf der Variable AFFC bildet ab, wie sich die Länge der Umwege bezüglich der Free-Flow-Reisekosten entwickelt, die die Verkehrsteilnehmer durch den Anreiz zur geteilten Mehrnutzung der Straßen befahren (siehe Abbildung 6.4d). Dass der Wert von AFFC zu Beginn stark ansteigt, entspricht also gerade der Erwartung, da durch starke Kostenänderungen in den ersten Iterationen initial weite Umwege stark an Kosten verlieren.

AAF und MF bilden ab, wie stark die Mehrnutzung der befahrenen Straßen durch die Verkehrsteilnehmer ausfällt (siehe Abbildungen 6.4e und 6.4f). Auch hier stimmt der starke Anstieg der Werte in den ersten Iterationen mit der Erwartung überein, dass für starke Kostenreduzierungen zu Beginn des Verfahrens höhere durchschnittliche und maximale Kantenauslastungen entstehen. Dies könnte weiter dadurch erklärt werden, dass die Kostenfunktion für Exponentengewichtete Kostenreduzierung streng konvex ist. Je höher der Flusswert auf einer Kante, desto weniger reduziert zusätzlicher Fluss die Kantenkosten. Dadurch könnten Kanten zu Beginn stark ausgelastet werden und in späteren Iterationen weniger neue kürzeste Pfade entstehen, auf denen diese Kanten liegen.

Obige Beschreibungen könnten auch erklären, weshalb eine Erhöhung des Exponenten β_e besonders starken Einfluss auf den Verlauf der Variablen AFFC, AAF und MF hat. Ein höherer Exponent β_e bedingt, dass die Kantenkosten der Kante e für jeden positiven Kantenfluss $f_e \in \mathbb{N}$ kleiner sind als für einen niedrigeren Exponenten. Hierdurch kann erklärt werden, dass die Kanten mit positivem Fluss im Durchschnitt auf einer höheren Anzahl an kürzesten Pfaden zwischen O-D-Paaren liegen. Eine Erhöhung des durchschnittlichen Flusses und des maximalen Flusses auf Kanten mit positivem Fluss ist also gerade das erwartete Ergebnis. Die höheren durchschnittlichen Free-Flow-Kosten der Pfade entsprechen ebenfalls der Erwartung, da bezüglich Free-Flow-Kosten weite Umwege stärker an Kosten verlieren könnten für einen höheren Exponenten β_e .

Es ist zu erkennen, dass für den höheren Wert 0,75 des Exponenten β_e die Konvergenz gemäß $RGAP < 10^{-4}$ in einer späteren Iteration erreicht ist als für den niedrigeren Wert 0,5. Es könnte erwartet werden, dass für kleinere Werte des Exponenten β_e eine höhere Anzahl Iterationen für hinreichende Nähe zum Nutzer-Equilibrium notwendig ist, da die Kosten der Kanten für gleiche Kantenflüsse weniger stark im Vergleich zu den Free-Flow-Kosten reduziert werden. Eine Erklärung für die dennoch schnellere Konvergenz könnte sein, dass für weniger stark reduzierte Kosten im ITA-Verfahren weniger verschiedene Pfade die kürzesten Pfade zwischen einem O-D-Paar werden. Dadurch könnten weniger Wechsel der kürzesten Pfade möglich sein und es könnte nach einer kleineren Anzahl an Iterationen ein stabiler Zustand erreicht werden.

Logarithmische Kostenreduzierung In Abbildung 6.5 sind die Entwicklungen der Variablen für Logarithmische Kostenreduzierung zu sehen. Die Werte der Parameter α_e und β_e werden für alle Kanten gleich gewählt. Dabei wurde die Basis $\alpha_e = 2$ des Logarithmus gewählt und die Ergebnisse für die Exponenten $\beta_e = 1$ und $\beta_e = 4$ miteinander verglichen.

Die Erwartung, dass die Variablen RGAP, RCF und RCC über die Ausführung des Verfahrens hinweg steigen, während AFFC, AAF und MF fallen, ist erfüllt, wie für Exponentengewichtete Kostenreduzierung. Gerade in den Graphen der Variablen RGAP und RCF treten auch weiterhin Ausschläge auf (siehe Abbildungen 6.5a und 6.5b). Eine Änderung im Wert des Exponenten β_e hat weiterhin sichtbare Auswirkungen auf die Variablen AFFC und AAF (siehe Abbildungen 6.5d und 6.5e).

Es ist zu beobachten, dass eine deutlich kleinere Anzahl an Iterationen nötig ist, bis $RGAP < 10^{-4}$ erfüllt ist, verglichen mit Exponentengewichteter Kostenreduzierung. Weiter erreichen die Graphen der Variablen AFFC, AAF und MF früher ein stabiles Niveau. Ebenfalls zu erkennen ist, dass der Graph der Variable RCC einen glatteren Verlauf hat (siehe Abbildung 6.5c).

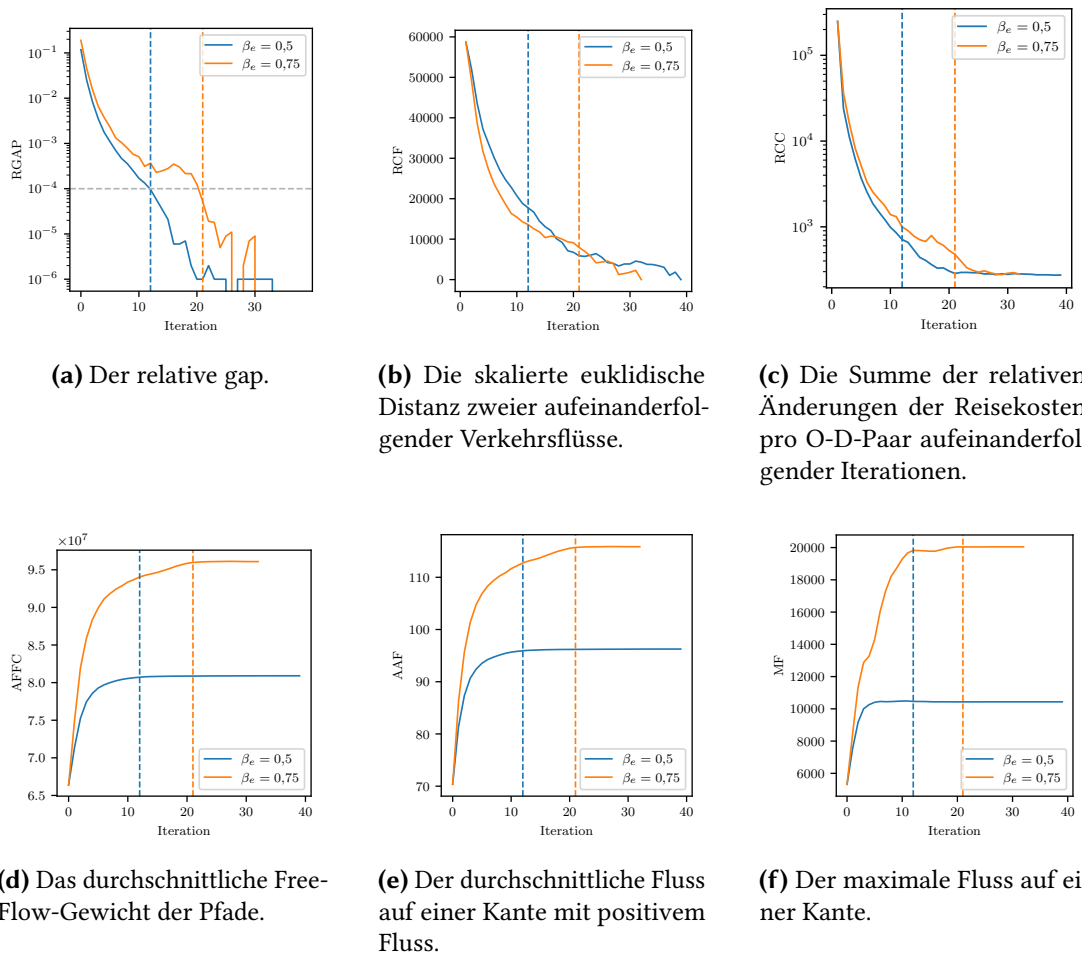


Abbildung 6.4: Entwicklung verschiedener Variablen bei Verwendung von Exponentengewichteter Kostenreduzierung mit $\alpha_e = 1$. Zu sehen sind Plots für die Werte $\beta_e = 0,5$ und $\beta_e = 0,75$. Die gestrichelten Linien markieren die erste Iteration, in der $RGAP < 10^{-4}$ für den jeweiligen Wert des Exponenten β_e gilt.

Diese beobachteten Änderungen im Vergleich zu Exponentengewichteter Kostenreduzierung könnten ähnlich wie die ausgeglichene Straßenauslastung, die in Abschnitt 6.2 beobachtet wird, begründet werden. Logarithmische Kostenreduzierung nach Gleichung 4.6 führt zu besonders starken Kostensenkungen durch eine Erhöhung von kleinen Kantenflusswerten. Steigt der Kantenfluss, so nimmt die potenzielle Kostenreduzierung durch zusätzlichen Fluss stark ab. Ist bereits in den ersten Iterationen auf einem Großteil der Kanten mit positivem Fluss ein Kantenfluss erreicht, für den zusätzlicher Fluss einen verschwindend geringen Effekt auf die Kantenkosten hat, so lösen die Wechsel der kürzesten Pfade in späteren Iterationen nur geringe Kostenänderungen aus. Die Anzahl an Wechslen der kürzesten Pfade nehmen dann innerhalb weniger Iterationen stark ab.

Die kleinere Anzahl an Iterationen bis zur Konvergenz könnte eine direkte Auswirkung dieser schneller sinkenden Anzahl an Wechslen der kürzesten Pfade sein. Dass die Kostenfunktionen der Kanten bereits für kleinere Kantenflusswerte flacher werden, könnte auslösen, dass die Anzahl der kürzesten Pfade, auf denen eine Kante mit positivem Fluss liegt, nach wenigen Iterationen nur noch schwach zunimmt. Hierdurch könnte das frühere Erreichen

stabiler Niveaus von AFFC, AAF und MF erklärt werden. Ebenfalls könnte durch diesen Effekt begründet sein, warum eine Erhöhung des Exponenten β_e eine kaum sichtbare Auswirkung auf den maximalen Kantenfluss MF im Netzwerk hat. Für beliebige Exponenten nähert sich die für kleine Kantenflüsse hoch negative Steigung der Kostenfunktionen schnell 0 an, was zu einer starken, aber gleichmäßigen Kostenreduzierung aller Kanten mit hinreichend hohem positiven Fluss führen könnte.

Dass Flussänderungen in späteren Iterationen weniger starke Kostenänderungen auslösen, könnte erklären, weshalb der Graph von RCF zwar weiterhin Ausschläge aufweist, der Graph von RCC aber einen sichtbar glatteren Verlauf hat als für Exponentengewichtete Kostenreduzierung.

Konsistent mit den Beobachtungen zu Exponentengewichteter Kostenreduzierung ist das schnellere Erreichen von $RGAP < 10^{-4}$ für einen kleineren Exponenten β_e . Auch für Logarithmische Kostenreduzierung nehmen die Kantenkosten für gleiche Kantenflüsse kleinere Werte an, je höher der Exponent β_e . Hierdurch könnte wiederum die Anzahl an Pfaden, die im Laufe des ITA-Verfahrens zu kürzesten Pfaden zwischen O-D-Paaren werden, erhöht werden und damit höhere Exponenten zu einer höheren Anzahl an Wechseln der kürzesten Pfade in späteren Iterationen führen.

Kapazitätsbeschränkte Kostenreduzierung Die Entwicklung der Variablen für Kapazitätsbeschränkte Kostenreduzierung ist in Abbildung 6.6 dargestellt. Für den Exponenten β_e wird für alle Kanten der Wert $\beta_e = 0,5$ gewählt und die Ergebnisse für die Kostenfunktion mit Wert $r = 1$ verglichen mit den Ergebnissen ohne Kapazitätsbeschränkung, also für $r = \infty$.

Die Variablen AFFC, AAF und MF nehmen unter Kapazitätsbeschränkung mit $r = 1$ geringere Werte an, verglichen mit den Werten ohne Kapazitätsbeschränkung mit $r = \infty$. Dieses Resultat entspricht gerade dem erwarteten Effekt der Änderung, dass zusätzlicher Kantenfluss die Kantenkosten einer Kante e nicht weiter reduziert, sobald der Kantenfluss f_e den Wert $u_e \cdot r$ erreicht. Kanten, für die der Kantenfluss diesen Schwellenwert erreicht, könnten dadurch im Laufe des ITA-Verfahrens auf weniger kürzesten Pfaden liegen als ohne Kapazitätsbeschränkung. Dadurch werden besonders hohe Kantenflüsse verhindert und die Free-Flow-Kosten der Umwege über solche stark ausgelasteten Kanten verringert, was die kleineren Werte von AFFC und MF unter Kapazitätsbeschränkung erklärt. Der durchschnittliche Kantenfluss unter den Kanten mit positivem Fluss ist auch ohne Kapazitätsbeschränkung kleiner als die Minimalkapazität 150 des Netzwerks, was den geringeren Effekt der Beschränkung auf den Wert der Variable AAF erklären könnte.

Unter Kapazitätsbeschränkter Kostenreduzierung ist $RGAP < 10^{-4}$ nach einer kleineren Anzahl an Iterationen erfüllt als ohne Kapazitätsbeschränkung. Dies könnte analog zu Exponentengewichteter und Logarithmischer Kostenreduzierung dadurch erklärt werden, dass die Anzahl an Pfaden, die potenziell zu kürzesten Pfaden werden können, sinken könnte durch Beschränkung der maximalen Kostenreduzierung.

RGAP als Konvergenzkriterium Für alle drei Kostenfunktionen können starke Ausschläge im Verlauf von RGAP beobachtet werden. Gerade in späteren Iterationen, in denen RGAP kleine Werte annimmt, ist die Entwicklung der Variable besonders ungleichmäßig. Für das ITA-Verfahren könnten dementsprechend die von Sheffi beschriebenen Konvergenzkriterien RCF und RCC eher geeignet sein.

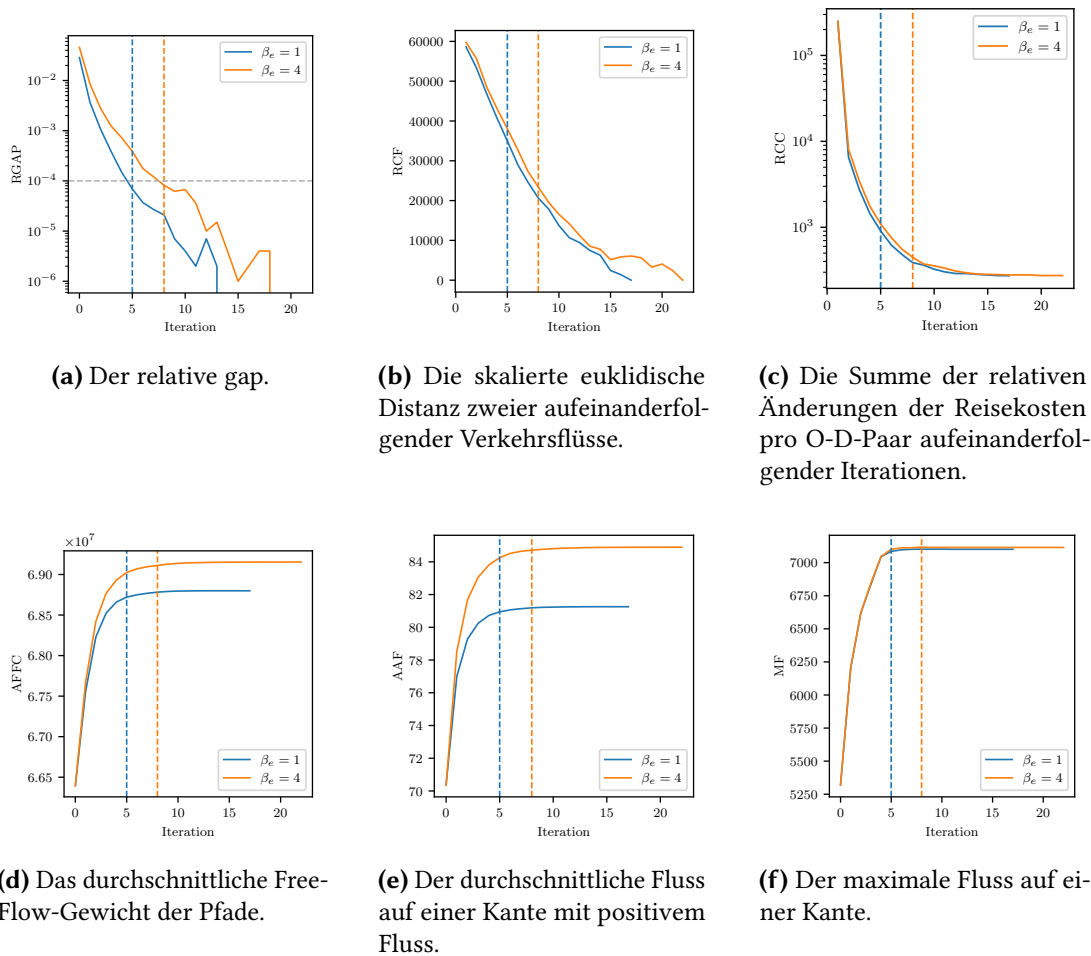


Abbildung 6.5: Entwicklung verschiedener Variablen bei Verwendung von Logarithmischer Kostenreduzierung mit $\alpha_e = 2$. Zu sehen sind Plots für die Werte $\beta_e = 1$ und $\beta_e = 4$. Die gestrichelten Linien markieren die erste Iteration, in der $RGAP < 10^{-4}$ für den jeweiligen Wert des Exponenten β_e gilt.

6.3.1 Absolute Werte

In diesem Abschnitt werden die absoluten Werte der analysierten Variablen betrachtet und für die verschiedenen Kostenfunktionen verglichen.

In Tabelle 6.2 sind die Werte der Variablen AFFC, AAF und MF aufgeführt, die im Nutzer-Equilibrium vorliegen, welches das ITA-Verfahren für die drei verschiedenen Kostenfunktionen findet. Für Exponentengewichtete Kostenreduzierung (EXP) wurden die Parameter $\alpha_e = 1$ und $\beta_e = 0,5$ gewählt, für Logarithmische Kostenreduzierung (LOG) die Parameter $\alpha_e = 2$ und $\beta_e = 2$ und für Kapazitätsbeschränkte Kostenreduzierung (CAP) die Parameter $\beta_e = 0,5$ und $r = 1$. Zudem sind die Werte der Variablen für die Initiallösung des ITA-Verfahrens, also für AON gemäß der Free-Flow-Kosten (F-F), angegeben.

Im Vergleich zu Exponentengewichteter Kostenreduzierung findet das ITA-Verfahren für Logarithmische und Kapazitätsbeschränkte Kostenreduzierung in einer kleineren Anzahl an Iterationen das entsprechende Nutzer-Equilibrium. Ein großer relativer Unterschied liegt auch für die benötigte Anzahl an Iterationen, bis $RGAP < 10^{-4}$ gilt, vor. Für LOG kann die

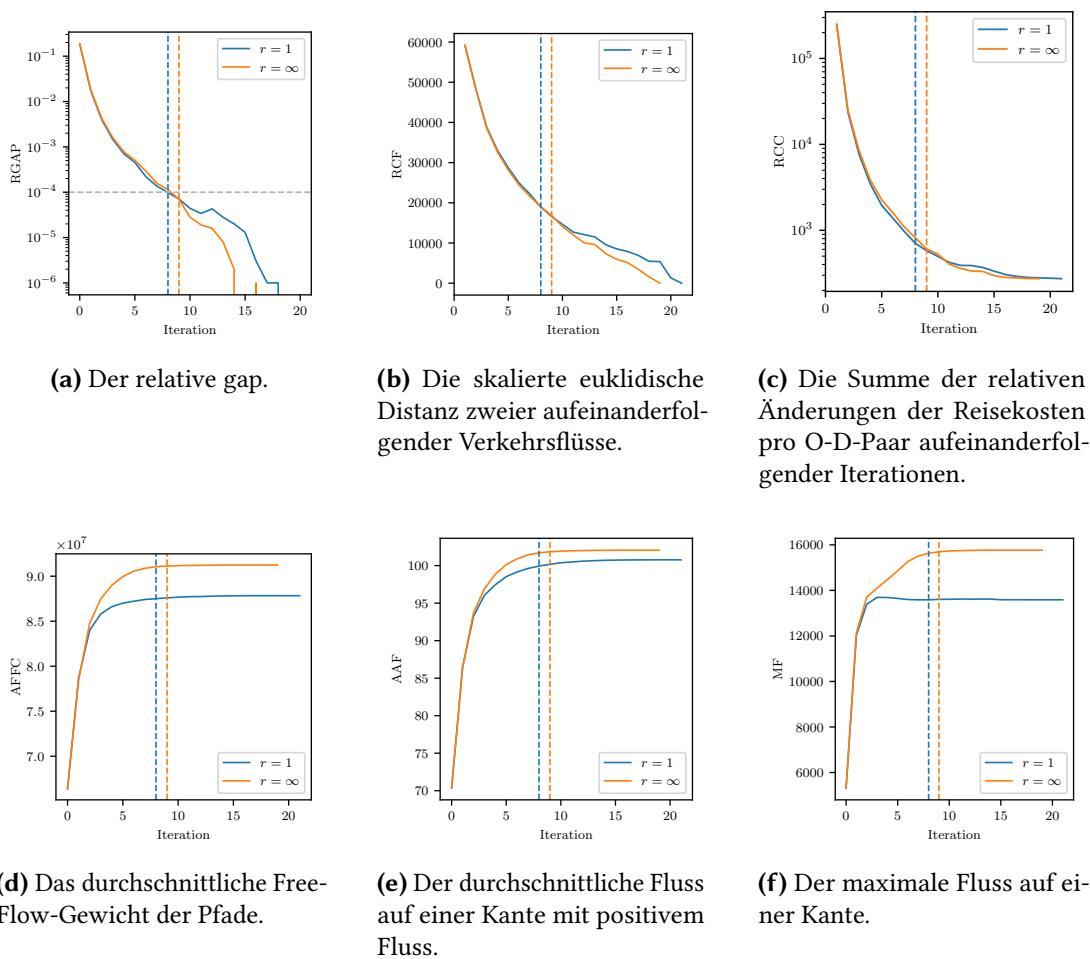


Abbildung 6.6: Entwicklung verschiedener Variablen bei Verwendung von Kapazitätsbeschränkter Kostenreduzierung mit $\beta_e = 0,5$. Zu sehen sind Plots für den Wert $r = 1$ und Plots ohne eine Beschränkung durch einen Wert r , also für $r = \infty$. Die gestrichelten Linien markieren die erste Iteration, in der $RGAP < 10^{-4}$ für den jeweiligen Wert gilt.

schnellere Konvergenz, wie in obiger Betrachtung des Variablenverlaufs erwähnt, dadurch erklärt werden, dass die kostenreduzierende Wirkung von zusätzlichem Fluss bei kleinem Kantenfluss sehr hoch ist und für höheren Kantenfluss schnell und stark abnimmt.

Für CAP wird der Kantenfluss, für den weitere Kostenreduzierung durch zusätzlichen Fluss möglich ist, explizit beschränkt. Weiter sinken die Kosten in der Kantenkapazität. Hierdurch könnte ein zu LOG vergleichbarer Effekt entstehen. Eine frühe starke Auslastung von Kanten mit hoher Kapazität bei verschwindender Wirkung weiterer Flussbewegungen kann erwartet werden, was die schnellere Konvergenz erklären kann.

Die Werte der Variablen AFFC, AAF und MF im Nutzer-Equilibrium sind wie erwartet für alle drei Kostenfunktionen höher als im Verkehrsfluss für Free-Flow-Kosten. Dabei sind die Werte für CAP jeweils am höchsten, während sie für LOG am niedrigsten sind. Zu beachten ist hierbei, dass eine Änderung der Parameter starken Einfluss auf die Werte dieser Variablen hat, wie am Verlauf der Kurven in den Abbildungen 6.4, 6.5 und 6.6 zu sehen ist. So können für EXP und einen höheren Exponenten β_e die Werte höher sein als die abgebildeten Werte für CAP.

Tabelle 6.2: Die Werte der Variablen AFFC, AAF und MF im gefundenen Nutzer-Equilibrium für Exponentengewichtete Kostenreduzierung mit $\alpha_e = 1$ und $\beta_e = 0,5$ (EXP), Logarithmische Kostenreduzierung mit $\alpha_e = 2$ und $\beta_e = 2$ (LOG), Kapazitätsbeschränkte Kostenreduzierung mit $r = 1$ und $\beta_e = 0,5$ (CAP) und konstante Free-Flow-Kosten (F-F). Die Spalte 10^{-4} gibt die Anzahl an Iterationen an, nach denen für die entsprechende Kostenfunktion $RGAP < 10^{-4}$ erreicht ist, die Spalte Equilibrium die Anzahl Iterationen, nach denen ein Nutzer-Equilibrium vorliegt.

Kosten	10^{-4}	Equilibrium	AFFC	AAF	MF
EXP	12	39	80 907 552	96,26	10 434
LOG	7	22	69 061 008	83,79	7 119
CAP	8	21	87 830 736	100,77	13 588
F-F	-	-	66 395 676	70,37	5 320

Dennoch kann betrachtet werden, warum LOG einen wesentlich geringeren Anstieg der Variablenwerte auslöst als CAP, obwohl wie oben angesprochen ein ähnlicher Effekt zu schneller Konvergenz führen könnte. Dies könnte dadurch erklärt werden, dass die für geringe Kantenflüsse starken Kostenreduzierungen für CAP besonders auf Kanten mit hoher Kapazität verstärkt sind. Wenige Kanten mit hoher Kapazität könnten also besonders an Kosten verlieren, wodurch sich Kantenfluss besonders auf diese Kanten konzentriert. Dies könnte zu einer Steigerung des Maximalflusses und zu teureren Umwegen bezüglich Free-Flow-Kosten führen, verglichen mit einer gleichmäßig starken Kostenreduzierung von Kanten mit positivem Fluss für LOG-Kosten. Hierdurch kann also insbesondere der besonders starke Unterschied in den Werten von AFFC und MF zwischen LOG und CAP erklärt werden.

Konvergenzgeschwindigkeit In Kapitel 5 wird das Ziel verfolgt zu beweisen, dass sich die Zuordnung von O-D-Paaren zu kürzesten Pfaden im Laufe des ITA-Verfahrens nie wiederholen kann. Treten keine solchen Wiederholungen auf, findet das ITA-Verfahren garantiert ein Nutzer-Equilibrium in höchstens so vielen Iterationen, wie es verschiedene Zuordnungen von O-D-Paaren zu Pfaden gibt. Abhängig von der Anzahl an O-D-Paaren und Pfaden, die diese verbinden, ist diese obere Schranke sehr hoch.

Aus der Analyse in diesem Abschnitt geht jedoch hervor, dass das ITA-Verfahren für alle betrachteten Kostenfunktionen und Parameter ein Nutzer-Equilibrium für die O-D-Paare OD-M in < 40 Iterationen findet. Darüber hinaus erreichen gerade die Variablen AFFC, AAF und MF jeweils bereits nach einer deutlich kleineren Anzahl an Iterationen ein stabiles Niveau.

6.4 Verschiedene Anzahlen von O-D-Paaren

Wie in Abschnitt 6.1 über die verschiedenen Mengen von O-D-Paaren beschrieben, ist die Annahme einer konstanten Verkehrsnachfrage zwischen jedem O-D-Paar präziser für kleine O-D-Paar Mengen wie OD-M und OD-A, die einzelne Stoßzeiten repräsentieren. Dennoch wird in diesem Abschnitt die Ausführung des ITA-Verfahrens auf den erheblich größeren Mengen OD-T und OD-W betrachtet, um die Auswirkung der Anzahl an O-D-Paaren auf das Konvergenzverhalten des ITA-Verfahrens zu analysieren.

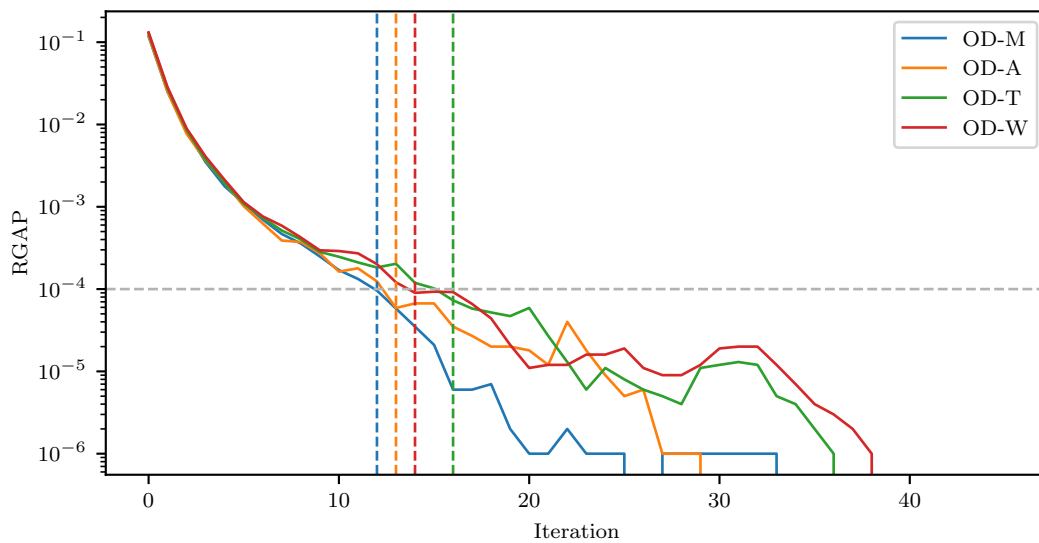


Abbildung 6.7: Die Entwicklung des relative gaps für die verschiedenen Mengen von O-D-Paaren und Exponentengewichtete Kostenreduzierung mit $\alpha_e = 1$ und $\beta_e = 0,5$ für alle Kanten. Die Iterationen, für die erstmals $\text{RGAP} < 10^{-4}$ gilt, sind durch die gestrichelten Linien markiert.

In Abbildung 6.7 ist die Entwicklung des relative gaps für die verschiedenen Mengen von O-D-Paaren unter Verwendung von Exponentengewichteter Kostenreduzierung abgebildet. Für die größeren Mengen OD-T und OD-W sind, wie für OD-M und OD-A, Schwankungen im Wert von RGAP auch noch in späteren Iterationen zu sehen.

Das Konvergenzkriterium $\text{RGAP} < 10^{-4}$ ist für OD-M nach 12, für OD-A nach 13, für OD-T nach 16 und für OD-W nach 14 Iterationen erstmalig erfüllt. Nach < 40 Iterationen wird für alle Mengen von O-D-Paaren $\text{RGAP} = 0$ erreicht. Ein Nutzer-Equilibrium wird für OD-M nach 39, für OD-A nach 36, für OD-T nach 43 und für OD-W nach 46 Iterationen gefunden. Auch für erheblich größere Anzahlen an O-D-Paaren ist ein Nutzer-Equilibrium also stets nach < 50 Iterationen erreicht.

Der Einsatz der gleichen Kostenfunktion mit gleichen Funktionsparametern kann für unterschiedliche Anzahlen von O-D-Paaren zu sehr unterschiedlichen Auswirkungen auf die Kantenkosten führen. Dies gilt gerade für streng konvexe Kostenfunktionen, für die die Kostenreduzierung durch zusätzlichen Fluss schnell im Kantenfluss abnimmt. Für besonders hohe Anzahlen an O-D-Paaren können dadurch eine große Anzahl an befahrenen Kanten sehr stark und gleichmäßig an Kosten verlieren. Daher sollte die eingesetzte Kostenfunktion auch an die Anzahl an O-D-Paaren angepasst werden, damit Unterschiede in den Kantenflüssen stärker in den Kosten repräsentiert sind.

6.5 Stark belastete und stark entlastete Straßen

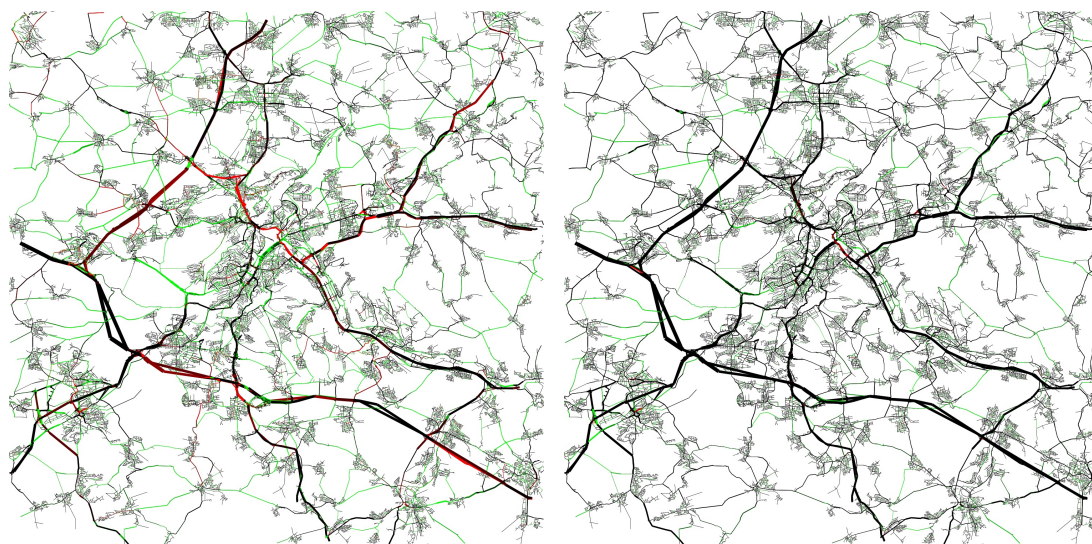
Durch den Anreiz zu Mehrnutzung der Straßen können wenige, stark ausgelastete Straßen entstehen. Gerade die Bestimmung dieser Straßen ist das Ziel von Inverse Traffic Assignment, wie in Kapitel 1 besprochen. Gleichzeitig können weite Teile des Netzwerks durch die Konzentration des Verkehrsaufkommens auf wenige Kanten stark entlastet werden, was ein

weiterer erwünschter Effekt der Verkehrszuordnung sein könnte. In den Visualisierungen der Auslastungen in Abschnitt 6.2 können Straßen mit hoher Auslastung beobachtet werden, nicht aber Straßen, die über das ITA-Verfahren hinweg stark an Fluss verlieren. In diesem Abschnitt werden daher solche besonders starken Flussreduzierungen den Flussserhöhungen auf anderen Straßen gegenübergestellt. Um die Be- oder Entlastung der Straßen über das ITA-Verfahren hinweg darzustellen, wird die Straßenauslastung, also der Kantenfluss auf der entsprechenden Kante, jeweils mit der Auslastung verglichen, die durch AON bezüglich der Free-Flow-Gewichte entsteht, also mit der Initiallösung des ITA-Verfahrens. Abbildung 6.8 zeigt Visualisierungen der Kantenflussänderungen. Kanten, die im Vergleich zur Initiallösung mehr als die Hälfte des Flusses verloren haben, werden abhängig vom Grad dieser Entlastung unterschiedlich stark grün gefärbt. Kanten, deren Fluss sich um mehr als 75% erhöht hat, sind analog rot dargestellt.

Abbildung 6.8a zeigt die Straßen mit starken Änderungen in den Auslastungen beim Einsatz Exponentengewichteter Kostenreduzierung nach Abschnitt 4.3.1. Es ist zu sehen, dass sich nach Konvergenz der Fluss auf vielen Kanten stark reduziert hat. Gerade im Stadtzentrum von Stuttgart wurden viele Straßen stark entlastet, während der Fluss sich auf wenige andere Routen konzentriert hat. Dieses Resultat erfüllt die Motivation von Inverse Traffic Assignment, eine große Anzahl an Verkehrsteilnehmern emissionsarm und energieeffizient über wenige Routen zu leiten und dabei weite Teile des Netzwerks zu entlasten. In der Umgebung der Stadt wurden viele Kanten mit geringer Kapazität entlastet, wobei sich die Auslastung auf wenigen Kanten, besonders auf solchen mit höherer Kapazität, stark erhöht hat.

Bei Logarithmischer Kostenreduzierung (siehe Abbildung 6.8b) ist auffallend, dass weiterhin eine große Anzahl an Kanten stark entlastet wird. Eine Flussserhöhung um mehr als 75% der Free-Flow-Initiallösung liegt nach Konvergenz des Verfahrens allerdings nur bei einer sehr kleinen Anzahl von Kanten vor, verglichen mit Exponentengewichteter Kostenreduzierung. Dieses Resultat kann analog zu den in Abschnitt 6.3 betrachteten Entwicklungen der Variablen dadurch erklärt werden, dass die Kostenverringerung für zusätzlichen Fluss bei kleinem Kantenfluss sehr viel höher ist als bei großem Kantenfluss, dass sich also die initial hoch negative Steigung der Kostenfunktion schnell 0 annähert.

Für Kapazitätsbeschränkte Kostenreduzierung (siehe Abbildung 6.8c) zeigt sich, dass Kanten mit hoher Kapazität besonders stark belastet werden. Auch im Stadtzentrum ist auffallend, dass, verglichen mit Exponentengewichteter Kostenreduzierung, weniger Entlastungen, sondern starke Belastungen auf Kanten mit hoher Kapazität vorliegen. Kanten mit geringer Kapazität werden hingegen weiterhin stark, oder sogar öfter und stärker, entlastet. Dies entspricht wiederum der Erwartung für Kapazitätsbeschränkte Kostenreduzierung, da die Kantenkosten in der Kapazität sinken und die Obergrenze $u_e \cdot r$ des maximalen Kantenflusses, für den weitere Kostenreduzierung möglich ist, in der Kapazität steigt.



(a) Exponentengewichtete Kostenreduzierung mit $\alpha_e = 1$ und $\beta_e = 0,5$.

(b) Logarithmische Kostenreduzierung mit $\alpha_e = 2$ und $\beta_e = 2$.



(c) Kapazitätsbeschränkte Kostenreduzierung mit $r = 1$ und $\beta_e = 0,5$.

Abbildung 6.8: Visualisierung von besonders starken Flussänderungen bei Ausführung des ITA-Verfahrens.

7 Schlussbemerkungen

In dieser Arbeit wurde mit Inverse Traffic Assignment eine neuartige Vorhersage des Verhaltens von Verkehrsteilnehmern bei der Routenwahl im urbanen Raum vorgestellt. Die zentrale Neuerung ist ein simulierter Anreiz zum Befahren von Straßen, auf denen ein hohes Verkehrsaufkommen vorliegt. Das Ziel ist die Bestimmung von Straßen und Routen, auf denen durch diesen Anreiz besonders viele Verkehrsteilnehmer reisen. Die Annahme ist, dass ein Ausbau der Möglichkeiten für die Nutzung öffentlicher und geteilter Verkehrsmittel auf diesen Routen besonders wirksam Schadstoffemissionen und Energieverbrauch des Personenverkehrs reduzieren könnte.

Weiterhin wurde das *ITA-Verfahren* vorgestellt, das iterativ jeden Verkehrsteilnehmer einer Route zuordnet, die Start- und Zielpunkt der Reise des Verkehrsteilnehmers verbindet und dabei die individuellen Reisekosten minimiert. Das Verfahren stoppt, sobald ein stabiler Zustand erreicht ist, in dem für die vorliegende Zuordnung für keinen Verkehrsteilnehmer ein günstigerer Alternativpfad vorliegt. Um dabei den Anreiz zum Befahren einer Route mit erhöhtem Verkehrsaufkommen zu simulieren, sinken die Reisekosten einer Route in der Anzahl an Verkehrsteilnehmern, die ihr zugeordnet werden.

Das Konvergenzverhalten des ITA-Verfahrens, also der Prozess der Findung einer Routenwahl, die einen stabilen Zustand darstellt, wurde in dieser Arbeit allgemein und für konkrete Eingaben untersucht. Es wurde gezeigt, dass sich eine feste Zuordnung von Verkehrsteilnehmern zu Routen bei der Ausführung des ITA-Verfahrens nie nach nur zwei Iterationen wiederholt. Wird dieser Beweis auf größere Anzahlen von Iterationen ausgeweitet, folgt, dass das ITA-Verfahren für beliebige Eingaben nach endlich vielen Iterationen konvergiert und einen oben beschriebenen stabilen Zustand erreicht, ein *Nutzer-Equilibrium*.

Das ITA-Verfahren wurde auf einem urbanen Straßennetzwerk für verschiedene Modellierungen der Reisekosten und verschiedene Mengen von nachgefragten Reisen zwischen Start- und Zielpunkten im Netzwerk ausgeführt. Es konnte über das Verfahren hinweg dabei stets eine starke Erhöhung des Verkehrsaufkommens auf wenigen Straßen bei gleichzeitig starker Entlastung weiter Teile des Straßennetzwerks festgestellt werden.

7.1 Zukünftige Arbeiten

Mit den in Abschnitt 4.3 vorgestellten Kostenfunktionen werden verschiedene Möglichkeiten vorgestellt, im Verkehrsaufkommen sinkende Reisekosten für das ITA-Verfahren umzusetzen. In der Realität beobachtetes Verhalten von Verkehrsteilnehmern im urbanen Raum könnte für die Definition weiterer Kostenfunktionen nützlich sein. Damit könnten gezielt die Kosten von solchen Routen reduziert werden, auf denen echte Verkehrsteilnehmer von einer Ausweitung der Möglichkeiten für öffentliche und geteilte Verkehrsmittel Gebrauch machen würden.

In dieser Arbeit wurde weiterhin angenommen, dass alle Verkehrsteilnehmer bei der Routenwahl korrekte und vollständige Information über das gesamte Straßennetzwerk und das Verkehrsaufkommen besitzen. Um mögliche Ungenauigkeiten in der Wahrnehmung und

den Entscheidungen der Verkehrsteilnehmer zu beachten, könnten stochastische Methoden angewendet werden, wie von Daganzo und Sheffi für Traffic Assignment mit steigenden Kantenkosten beschrieben wird [DS77].

Der Beweis, dass sich die Routenwahl nie nach zwei Iterationen wiederholt, könnte möglicherweise mit den in Abschnitt 5.2.4 besprochenen Ansätzen auf allgemeine Anzahlen an Iterationen ausgeweitet werden. Die allgemeine Abwesenheit von Wiederholungen in der Routenwahl garantiert jedoch nur eine sehr hohe obere Schranke für die Anzahl an nötigen Iterationen, bis ein Nutzer-Equilibrium erreicht ist. Der Nachweis schnellerer Konvergenz kann weiter durch die Experimente in Kapitel 6 motiviert werden, in denen die Routenwahl stets nach einer sehr kleinen Anzahl an Iterationen einen stabilen Zustand erreicht hat, verglichen mit dieser oberen Schranke. Hilfreich für den Beweis schnellerer Konvergenz auf beliebigen Eingaben könnten die Ansätze aus Abschnitt 5.3 sein.

Literatur

- [BMW56] Martin Beckmann, Charles B McGuiree und Christopher B Winsten. *Studies in the Economics of Transportation*. Yale University Press, 1956.
- [Bra68] Dietrich Braess. „Über ein Paradoxon aus der Verkehrsplanung“. In: *Unternehmensforschung* Jg. 12 (1968), S. 258–268. DOI: [10.1007/BF01918335](https://doi.org/10.1007/BF01918335).
- [Bra76] David Branston. „Link capacity functions: A review“. In: *Transportation Research* Jg. 10 (1976), S. 223–236. DOI: [https://doi.org/10.1016/0041-1647\(76\)90055-1](https://doi.org/10.1016/0041-1647(76)90055-1).
- [BRB04] David Boyce, Biljana Ralevic-Dekic und Hillel Bar-Gera. „Convergence of Traffic Assignments: How Much is Enough?“. In: *Journal of Transportation Engineering* Jg. 130 (2004), S. 49–55. DOI: [10.1061/\(ASCE\)0733-947X\(2004\)130:1\(49\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-947X(2004)130:1(49)).
- [BSW19] Valentin Buchhold, Peter Sanders und Dorothea Wagner. „Real-Time Traffic Assignment Using Engineered Customizable Contraction Hierarchies“. In: *ACM J. Exp. Algorithmics* Jg. 24 (Dez. 2019), S. 1–28. DOI: [10.1145/3362693](https://doi.org/10.1145/3362693).
- [CC58] A Charnes und WW Cooper. „Extremal principles for simulating traffic flow in a network“. In: *Proceedings of the National Academy of Sciences* Jg. 44 (1958), S. 201–204. DOI: [10.1073/pnas.44.2.201](https://doi.org/10.1073/pnas.44.2.201).
- [CHM10] Mikhail V Chester, Arpad Horvath und Samer Madanat. „Comparison of life-cycle energy and emissions footprints of passenger transportation in metropolitan regions“. In: *Atmospheric Environment* Jg. 44 (2010), S. 1071–1079. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.atmosenv.2009.12.012>.
- [CS11] José R. Correa und Nicolás E. Stier-Moses. „Wardrop Equilibria“. In: *Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science*. John Wiley & Sons, Inc., Feb. 2011. DOI: [10.1002/9780470400531.eorms0962](https://doi.org/10.1002/9780470400531.eorms0962).
- [CSS04] José R Correa, Andreas S Schulz und Nicolás E Stier-Moses. „Selfish Routing in Capacitated Networks“. In: *Mathematics of Operations Research* Jg. 29 (2004), S. 961–976. DOI: [10.1287/moor.1040.0098](https://doi.org/10.1287/moor.1040.0098).
- [CSS08] José R Correa, Andreas S Schulz und Nicolás E Stier-Moses. „A geometric approach to the price of anarchy in nonatomic congestion games“. In: *Games and Economic Behavior* Jg. 64 (2008), S. 457–469. DOI: [10.1016/j.geb.2008.01.001](https://doi.org/10.1016/j.geb.2008.01.001).
- [Daf68] Styliani-Stella Constantine Dafermos. *Traffic assignment and resource allocation in transportation networks*. The Johns Hopkins University, 1968.
- [Dia06] Robert B Dial. „A path-based user-equilibrium traffic assignment algorithm that obviates path storage and enumeration“. In: *Transportation Research Part B: Methodological* Jg. 40 (2006), S. 917–936. DOI: [10.1016/j.trb.2006.02.008](https://doi.org/10.1016/j.trb.2006.02.008).
- [Dia71] Robert B Dial. „A probabilistic multipath traffic assignment model which obviates path enumeration“. In: *Transportation research* Jg. 5 (1971), S. 83–111.

- [DS69] Stella C Dafermos und Frederick T Sparrow. „The traffic assignment problem for a general network“. In: *Journal of Research of the National Bureau of Standards B* Jg. 73 (1969), S. 91–118. DOI: [10.6028/jres.073B.010](https://doi.org/10.6028/jres.073B.010).
- [DS77] Carlos F Daganzo und Yosef Sheffi. „On stochastic models of traffic assignment“. In: *Transportation science* Jg. 11 (1977), S. 253–274. DOI: [10.1287/trsc.11.3.253](https://doi.org/10.1287/trsc.11.3.253).
- [DSW16] Julian Dibbelt, Ben Strasser und Dorothea Wagner. „Customizable Contraction Hierarchies“. In: *ACM J. Exp. Algorithmics* Jg. 21 (2016), S. 1–49. DOI: [10.1145/2886843](https://doi.org/10.1145/2886843).
- [DW11] Juan de Dios Ortúzar und Luis G Willumsen. *Modelling transport*. John Wiley & sons, 2011.
- [FCF09] Michael Florian, Isabelle Constantin und Dan Florian. „A New Look at Projected Gradient Method for Equilibrium Assignment“. In: *Transportation Research Record* Jg. 2090 (2009), S. 10–16. DOI: [10.3141/2090-02](https://doi.org/10.3141/2090-02).
- [FH95] Michael Florian und Donald Hearn. „Network equilibrium models and algorithms“. In: *Network Routing*. Bd. 8. Elsevier, 1995, S. 485–550. DOI: [10.1016/S0927-0507\(05\)80110-0](https://doi.org/10.1016/S0927-0507(05)80110-0).
- [FT91] Drew Fudenberg und Jean Tirole. *Game theory*. MIT press, 1991.
- [Fuk84] Masao Fukushima. „A modified Frank-Wolfe algorithm for solving the traffic assignment problem“. In: *Transportation Research Part B: Methodological* Jg. 18 (1984), S. 169–177. DOI: [10.1016/0191-2615\(84\)90029-8](https://doi.org/10.1016/0191-2615(84)90029-8).
- [FW56] Marguerite Frank und Philip Wolfe. „An algorithm for quadratic programming“. In: *Naval Research Logistics Quarterly* Jg. 3 (1956), S. 95–110. DOI: [10.1002/nav.3800030109](https://doi.org/10.1002/nav.3800030109).
- [Gen14] Guido Gentile. „Local User Cost Equilibrium: a bush-based algorithm for traffic assignment“. In: *Transportmetrica A: Transport Science* Jg. 10 (2014), S. 15–54. DOI: [10.1080/18128602.2012.691911](https://doi.org/10.1080/18128602.2012.691911).
- [GSSD08] Robert Geisberger, Peter Sanders, Dominik Schultes und Daniel Delling. „Contraction Hierarchies: Faster and Simpler Hierarchical Routing in Road Networks“. In: *Experimental Algorithms*. Hrsg. von Catherine C. McGeoch. Springer Berlin Heidelberg, 2008, S. 319–333. DOI: [10.1007/978-3-540-68552-4_24](https://doi.org/10.1007/978-3-540-68552-4_24).
- [GSSV12] Robert Geisberger, Peter Sanders, Dominik Schultes und Christian Vetter. „Exact Routing in Large Road Networks Using Contraction Hierarchies“. In: *Transportation Science* Jg. 46 (2012), S. 388–404. DOI: [10.1287/trsc.1110.0401](https://doi.org/10.1287/trsc.1110.0401).
- [Her+19] Edgar G Hertwich, Saleem Ali, Luca Ciacci, Tomer Fishman, Niko Heeren, Eric Masanet, Farnaz Nojavan Asghari, Elsa Olivetti, Stefan Pauliuk, Qingshi Tu u. a. „Material efficiency strategies to reducing greenhouse gas emissions associated with buildings, vehicles, and electronics—a review“. In: *Environmental Research Letters* Jg. 14 (2019), S. 043004. DOI: [10.1088/1748-9326/ab0fe3](https://doi.org/10.1088/1748-9326/ab0fe3).
- [JK09] Sheldon H. Jacobson und Douglas M. King. „Fuel saving and ridesharing in the US: Motivations, limitations, and opportunities“. In: *Transportation Research Part D: Transport and Environment* Jg. 14 (2009), S. 14–21. DOI: [10.1016/j.trd.2008.10.001](https://doi.org/10.1016/j.trd.2008.10.001).
- [JTTPR94] R Jayakrishnan, Wei T Tsai, Joseph N Prashker und Subodh Rajadhyaksha. „A Faster Path-Based Algorithm for Traffic Assignment“. In: *Transportation Research Record* Jg. 1443 (1994).

-
- [KP09] Elias Koutsoupias und Christos Papadimitriou. „Worst-case equilibria“. In: *Computer Science Review* Jg. 3 (2009), S. 65–69. DOI: 10.1016/j.cosrev.2009.04.003.
- [MKV13] Nicolai Mallig, Martin Kagerbauer und Peter Vortisch. „mobiTopp – A Modular Agent-based Travel Demand Modelling Framework“. In: *Procedia Computer Science* Jg. 19 (2013), S. 854–859. DOI: 10.1016/j.procs.2013.06.114.
- [ML13] Maria Mitradjieva und Per Olov Lindberg. „The Stiff Is Moving—Conjugate Direction Frank-Wolfe Methods with Applications to Traffic Assignment“. In: *Transportation Science* Jg. 47 (2013), S. 280–293. DOI: 10.1287/trsc.1120.0409.
- [Nas50] John F Nash Jr. „Equilibrium points in n-person games“. In: *Proceedings of the National Academy of Sciences* Jg. 36 (1950), S. 48–49. DOI: 10.1073/pnas.36.1.48.
- [Nas51] John Nash. „Non-Cooperative Games“. In: *Annals of Mathematics* Jg. 54 (1951), S. 286–295.
- [Nie10] Yu Marco Nie. „A class of bush-based algorithms for the traffic assignment problem“. In: *Transportation Research Part B: Methodological* Jg. 44 (2010), S. 73–89. DOI: 10.1016/j.trb.2009.06.005.
- [Owe13] Guillermo Owen. *Game theory*. Emerald Group Publishing, 2013.
- [Pat15] Michael Patriksson. *The Traffic Assignment Problem: Models and Methods*. Courier Dover Publications, 2015.
- [Pat94] Michael Patriksson. *The traffic assignment problem: models and methods*. VSP Utrecht, The Netherlands, 1994.
- [PERW15] Olga Perederieieva, Matthias Ehrgott, Andrea Raith und Judith YT Wang. „A framework for and empirical study of algorithms for traffic assignment“. In: *Computers & Operations Research* Jg. 54 (2015), S. 90–107. DOI: 10.1016/j.cor.2014.08.024.
- [Pub64] United States Bureau of Public Roads. *Traffic Assignment Manual for Application with a Large, High Speed Computer*. U.S. Department of Commerce, Bureau of Public Roads, Office of Planning, Urban Planning Division, 1964.
- [Ros73] Robert W Rosenthal. „The network equilibrium problem in integers“. In: *Networks* Jg. 3 (1973), S. 53–59. DOI: 10.1002/net.3230030104.
- [Rou02] Tim Roughgarden. „The Price of Anarchy is Independent of the Network Topology“. In: *Proceedings of the Thiry-Fourth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*. Association for Computing Machinery, 2002, S. 428–437. DOI: 10.1145/509907.509971.
- [RT02] Tim Roughgarden und Éva Tardos. „How Bad is Selfish Routing?“ In: *J. ACM* Jg. 49 (2002), S. 236–259. DOI: 10.1145/506147.506153.
- [She85] Yosef Sheffi. *Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis With Mathematical Programming Methods*. Prentice-Hall, 1985.
- [SHP11] Johannes Schlaich, Udo Heidl und Regine Pohlner. „Verkehrsmodellierung für die Region Stuttgart–Schlussbericht“. In: *Unpublished* (2011).
- [SP81] Yosef Sheffi und Warren Powell. „A comparison of stochastic and deterministic traffic assignment over congested networks“. In: *Transportation Research Part B: Methodological* Jg. 15 (1981), S. 53–64. DOI: 10.1016/0191-2615(81)90046-1.

- [Spi90] Heinz Spiess. „Conical Volume-Delay Functions“. In: *Transportation Science* Jg. 24 (1990), S. 153–158. DOI: [10.1287/trsc.24.2.153](https://doi.org/10.1287/trsc.24.2.153).
- [Stu11] Verband Region Stuttgart. „Mobilität und Verkehr in der Region Stuttgart 2009/2010: Regionale Haushaltsbefragung zum Verkehrsverhalten“. In: *Schriftenreihe Verband Region Stuttgart* Jg. 29 (2011), S. 1–138.
- [War52] John Glen Wardrop. „Some theoretical aspects of road traffic research.“ In: *Proceedings of the Institution of Civil Engineers* Jg. 1 (1952), S. 325–362. DOI: [10.1680/ipeds.1952.11259](https://doi.org/10.1680/ipeds.1952.11259).
- [YLCV18] Biao Yin, Liu Liu, Nicolas Coulombel und Vincent Viguie. „Appraising the environmental benefits of ride-sharing: The Paris region case study“. In: *Journal of Cleaner Production* Jg. 177 (2018), S. 888–898. DOI: [10.1016/j.jclepro.2017.12.186](https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2017.12.186).